パリティ物理学コース

牧 二郎　長岡 洋介　大槻 義彦　編

素粒子物理

牧　二　郎
林　浩　一　共著

丸善株式会社

パリティ物理学コース

発刊にあたって

物理学という学問は，近代科学の柱として古い歴史をもちながら，とりわけガリレオやニュートンによる力学の建設をはじめ，光学・熱学・電磁気学など多くの分野で長足の発展を遂げ，自然科学の中で欠くことのできない大きな構成部分を占めています．特に20世紀に入ってからは，相対性理論や量子力学といった斬新な理論が打ち立てられてその魅力が倍増したのみならず，極微の世界から大宇宙に及ぶ人類の認識能力を大きく拡げ，工学的応用によって多くの先端技術を切り拓くとともに，広く自然科学の他の分野にも深い影響を及ぼしています．専門的知識の最前線としての物理学を習得しようとする人々は近年ますます多くなってきていますが，それとともに，物理学は，その基本的な知識や方法が，かつてなかったほど広範囲な領域に普及されていく時代を迎えていると思われます．

このような状況の中で，本コースは，物理学を必要とする研究分野の多岐にわたる読者の要望に応える新しい構成と規模によって，物理学の広範な領域を多面的に学習することを可能にするコースです．本コースの柱となるテーマは，大学初年度から大学院教育にわたって必要なものを網羅し，力学や電磁気学といった基礎・教養の物理学から，高エネルギー物理学，核物理学，物性物理学，宇宙物理学その他に至るさまざまな分野の

ものが取り上げられています．また，それぞれのテーマについては，同一のテーマであっても性格の違う複数のものをそろえ，読者自身が選択できるようにした新しいタイプの構成をめざしています．

さらに，コースの柱を補うものとして，“クローズアップ”というサブテキスト・シリーズが用意されています．これは，現在脚光をあびている先端的な問題や，科学史的あるいは教育的見地からその必要性が認められる題材を随時補完するものであり，読物的色彩に富むシリーズです．

したがって，読者は，各テーマ毎に自分に適したものを選択し，かつ必要に応じて“クローズアップ”からサブテーマを選ぶことにより，イージーオーダー方式で，自分専用に，自分に最適のコースを用意することができます．

このような特徴を備えたこの新コースは，各分野で物理を学ぶ大勢の人達に受け入れられ，それぞれの分野の発展に寄与するものと確信いたします．

牧　二　郎

まえがき

本書は素粒子の物理を理解するための基礎的知識を初学者向きに体系づけた入門書である．“初学者”として大学の物理学コースに学ぶ4年生から大学院初年級の読者を念頭に置いたが，物理学の最前線に関心をもたれる他の分野の方々にも参考書として読んでいただけると期待している．

自然科学の研究対象は今日，大は全宇宙から小は物質の極微の構成単位まで広い範囲に及んでいるが，自然界のこの両極をそれぞれ対象とする宇宙物理学と素粒子物理学は，広い物理学の中でも独自の立場に置かれている．それは一つには私たち人間のもつ自然像と深くかかわっているという意味でその内容に哲学的関心が寄せられてきたからであり，また一つにはその研究対象が固定的なものではなく，「宇宙」といい「素粒子」といい，対象概念自身が学問の発展とともに変遷し，物理学の最前線に新たな地平を開いてきたことによっている．そして近年では，物理学のこの二つの領域は，ますます深く直接に結びついているのである．素粒子物理の側からいえば，その理論はいまや，地上の実験室で高エネルギー加速器がもたらす豊富で精密なデータによって支えられる(または反証される)のみでなく，宇宙物理学上の最新の知見によっても直接にチェックされる段階に達している．

何が自然を構成する物質要素であり，それをどのような法則が支配しているかを追究するという点からすれば，素粒子の物理は遠くギリシア時代の原子論や自然学にまでさかのぼる長い歴史をもっているともいえる．量子力学も実はこの歴史の中で発見された20世紀の物理学最大の成果であるが，量子力学が古典力学に代る新たな物理法則として完成したのは1925-26年のころである．その後相対論的電子論（1928年），場の量子論(1929年)，中間子論(1935年)等によって現代の素粒子物理学のいわば原型が築かれた．それ以後今日までの半世紀を越える歴史は，理論・実験ともに波乱に満ちたものであったが，この間，大きな発展の度ごとにそこに用いられる理論的定式化の方法や素粒子の生成・検出の実験的手段は大幅な進歩をとげた．

こうした事情のために，いわゆるディシプリン（習熟すべき研究方法の体系）の面から見れば，「入門」にもさまざまの程度や方法があろう．最近「素粒子物理学」に関する専門書は，内外ともに数多く出版されている．巻末に挙げた著作はその一部である．それぞれに特色があり，理解のために工夫が凝らされているので，素粒子の物理を志す読者はどの書物から学び始めてもよいであろう．

本書は，これらの専門書の中に含まれる，いわば「必須科目」的部分について，可能な限り簡潔かつ平易に講述し，今日の素粒子物理学の骨格をなす標準模型の根拠を，初歩的ながら正確に理解できるように題材を選択した．したがって本書は，さまざまの専門書に接して必要事項の理解を深め，あるいは原論文に取り組み，自ら未解決の問題を発見しようとする読者のためには，事前の確実な予習書として役立つであろう．この意味で，本書は「入門書」である．しかし「解説書」ではない．

解説書，特に数式の使用を避けて書かれた啓蒙的書物の多くは肝心の読者にとって必ずしもわかりやすいものではない．おそらくその理由は，省いた数式のポイントを日常の言葉で表現することに限界があることに加え，言語的表現に不用意なあい

まいさが残されているためであろう．専門家をめざすのではない読者が素粒子の姿を知ることにより現代物理学の到達点を理解しようとする場合，解説的記述の不足を補うために，本書は，簡便な概論書として活用できるであろう．

本書を読むための基礎知識としては，量子力学，電磁気学，特殊相対性理論，一次代数学とベクトル空間論，微積分学それぞれの初歩で十分であり，この知識で理解できる範囲に内容を限定した．また，本文各章の位置づけのために，簡単な歴史的事項を序章にまとめた．本書の構成と内容の精選は著者たちの研究・教育の経験に基づいているが，不正確な点や思わぬ誤りが含まれていないかと恐れる．読者のご批判を得て機会を見て改善してゆきたいと考えている．

終りにのぞみ，本書の編集・校正にあたって，丸善出版事業部の佐久間弘子氏はじめ皆様に多大の労をおかけした．本書がようやく完成に漕ぎつけたのはこれらの方々の辛抱強いご協力の賜物である．ここに心から御礼申し上げる次第である．

1995 年 10 月

牧　二郎
林　浩一

目　　次

序　　説

「素粒子」の起源

素粒子物理学の研究対象はいうまでもなく「素粒子」である．この言葉（elementary particle）がいつから物理の中に登場したか明らかでないが，アインシュタイン（A. Einstein, 1879-1955）が1908年の論文の中でドイツ語Elementarteilchenで表したものが最初だという説がある．アインシュタインのこの論文は電磁場の中で静止した物体に作用する力を論じたもので，この語は素電荷あるいは磁気能率をもつ微小粒子といったほどの意味で使われている．『アインスタイン全集』（石原純監訳，1922年）では，これに「電気及び磁気の素粒子」という訳語があてられている．

しかし，物質を構成する要素的粒子という意味でこの言葉が用いられたのは，ハイゼンベルク（W. Heisenberg, 1901-1976）とディラック（P. A. M. Dirac, 1902-1984）が1933年に行ったノーベル賞受賞講演が最初だと見なしてよい．ハイゼンベルクは「原子核の素粒子（elementary particles of the atomic nuclei）の間に作用する力は原子の殻（atomic shell）の構造を定める力とは異なる……」と語り，ディラックはさらに光子，電子，重粒子（陽子と中性子のこと）を名指して，これらをelementaryまたはfundamental particlesといっている．これら

について，「複合粒子との区別は厳密にはできない」と指摘しながら，「より単純な種類の粒子」であるとしてこの言葉を用いたのである．日本では，湯川秀樹（1907-1981）の中間子論第1論文（1935年）の題名が（英文で）「素粒子（elementary particles）の相互作用について」となっており，「素粒子」という言葉が物理学の用語として『理化学辞典』（岩波書店）に載せられたのも同じ1935年である．このとき「要素的粒子」という案も出されたが，「分けられないのだから，いっそのこと“素粒子”にしてしまえ」と朝永振一郎ら理化学研究所のグループが決めたのだそうである．

「素粒子」の変遷と物理法則

語源の詮索はこのくらいにするが，「物質を構成する（究極的）要素」という概念には常にある妖しさがつきまとってきた．それは第1に，この概念にあてはまるものが何であるかについての物理的知識が歴史とともに変遷してきたことによる．本書第1章（素粒子と相互作用）でもこの点に触れるが，これと関連して第2に，この概念自体がいつまで成り立つものか不明だということがある．というのも，「究極的構成要素」という言葉に正確な意味を与えるためには，もちろん，物理の法則を拠り所としなければならないわけだが，しかしこの要素的なものの発見と物理の法則の追究は，研究の歴史の中でこれまで，常に鶏と卵のような関係に置かれてきたのである．

例えば電子も光子も19世紀の末から20世紀の冒頭にかけてその存在が突き止められたのであるが，これらは（特殊）相対性理論や量子論を生み出す契機となることによって，逆に自らを記述する法則を生み出したといってもよい．ディラックが前記の講演で「素粒子」として光子や電子について述べたときには，電磁場の量子論と電子の相対論的方程式，陽電子の存在などが念頭に置かれており，ハイゼンベルクとパウリ（W. Pauli, 1900-1958）の量子電気力学（1929年）もすでに広く認められて

いた．本書では第2章（粒子と場），第4章（ディラック方程式）でこれらの理論が説明される．量子電気力学は場の量子論によって光子と電子の相互作用を扱うものである．これは，計算の結果に数学的発散が現れるという奇妙な困難を含んでいたが，1948-49年ごろに朝永振一郎（1906-1978），シュウィンガー（J. Schwinger, 1918-1993），ファインマン（R. Feynman, 1918-1988）が「くりこみ理論」を定式化し，この困難が解決されて信頼するに足る理論となった．これに基づく計算法は第8章（量子電気力学）で説明される．

他方，ハイゼンベルクが「原子核の素粒子」として陽子，中性子について述べたとき，これらがディラック方程式に従うかどうかもまだ定かでなく，ましてこれらの間に働く力はなぞに包まれていた．前に述べた中間子論が初めてこの力の起源を説明したのである．中間子は新たに導入された素粒子だったが，この粒子のスピンがゼロならば，第5章（プロパゲーター）で説明するスカラー場の計算法に従って陽子や中性子（まとめて核子とよぶ）の間を伝播し，核子間の力すなわち「核力」を生み出す．ここでも，中間子の存在が核力に関する法則を与えている．

この時期に「素粒子」とされていた粒子は6種類，すなわち陽子，電子，光子，中性子，ニュートリノ，中間子がすべてであった．このうち，後ろの3種類は1930年以降の新参者であり，ニュートリノも中間子もまだ有力な仮説の域にとどまっていた．中性子が原子核の素粒子として発見された1932年より前には，今日では信じがたいことだが，物質の究極要素は，陽子と電子と光子の3種類で尽されていたのである．これらは現在の標準理論の，クォーク，レプトン，ゲージ粒子のそれぞれから1種類ずつを選んでいたことになる．

注意しておきたいことは，新参の3種類の素粒子はいずれも物理の基本法則と結びついていることである．中性子の存在により原子核における角運動量の保存則が満たされ，ニュートリ

ノによって原子核の β 崩壊におけるエネルギー保存則が救済された．そして中間子は核力の近接作用性を量子論的に扱うことから「場の量子」として存在しなければならないものである．

多様性から統一へ

素粒子の種類をこれだけ増やすことにより，電磁相互作用に加えて，弱い相互作用（β 崩壊など）と強い相互作用（核力など）を，すべて相対論的場の量子論によって理解できる段階に達した．本書でいえば第 2 章，第 4 章，第 5 章，第 8 章の知識の範囲にほぼ収まるもので，このころは素粒子物理の基礎が据えられた時期であったといってよい．

このパラダイムは 10 数年その地位を保ったが，1950 年前後から，予期せざる状況が現れてきた．実は前に述べた新参の粒子の存在がすでにその先触れだったのだが，高エネルギー粒子加速器や粒子検出装置の発達，宇宙線の分析法の発展など，実験手段の発達によりこれまで予想しなかった新しい粒子が続々と発見され始めたのである．特に核子や中間子と強い相互作用で結びつく粒子（ハドロンと総称）の種類は 100 種類を優に超えるほどになった．これらはすべて「素粒子」であろうか，ハドロンの中には素粒子とそうでない粒子とがあるのではないか，と多くの物理学者が疑うようになった．

例えば，フェルミ（E. Fermi, 1901-1956）は 1949 年のヤン（C. N. Yang, 1922- ）との共著論文を次のような言葉で書き始めた．

「最近いくつかの新しい粒子が発見され，それらは本質的に構造のないもの，つまり“素粒子”だと仮定されている．これらの粒子を本当に要素的（elementary）だとすべき確率は，その種類が増えるにつれてますます小さくなる．核子，中間子，電子，ニュートリノがすべて素粒子であるというのは決して確実なことではなく，現存の理論にうまくゆかない点があるのは，これらの粒子のうちに複雑な構造をもつものが存在する可

能性を無視したことによるのかもしれない．……」

そして一例として，π(パイ) 中間子が素粒子でなく核子と反核子とが結合した複合粒子であるという仮説を唱えたのである．この理論はクォーク模型への最初の一歩を踏み出したものだが，当時の評判は芳しいものではなかった．π 中間子は加速器で生成されてその存在が実証されていた (1948 年) ものの，一方，反核子はまだ見つかっていなかったという事実もその理由だったであろう．彼らは続けて「この仮説は現在の実験で知られている範囲を超えてはいるが，それほど革命的なものだとは考えていない」と弁明するが，これまた興味深い発言である．

いささか異端風のこの模型を，ストレンジ粒子を含むように最も単純な形で拡張したのが坂田昌一 (1911-1970) の考えである (1955 年)．すなわち，核子と反核子のほかに Λ(ラムダ) 粒子とその反粒子をつけ加えれば，当時知られていたすべてのハドロンがストレンジネスの規則 (中野-西島-ゲル・マンの規則，1953 年) に従う理由が明らかになる．この理論が成功すれば，ハドロンの大部分は素粒子でなく，本当の素粒子はハドロンの中では核子 (陽子，中性子) と Λ 粒子の 3 種類に限定される．

対称性が生み出すもの

ところが自然は，ハドロンのこのような扱いを許すほど単純ではなかった．そのことを明らかにしたのが強い相互作用の SU(3) 対称性である．この対称性は，上記の坂田模型が具備すべきものとして導入された (小川修三，山口嘉夫，1958 年) が，この対称性に対する実験的支持が進むにつれて，元の坂田模型が困難に直面するという奇妙な状況に陥った．どこが悪いのか．答はあっけないほど簡単なところにあった．ハドロン族の粒子には「素粒子」はなく，SU(3) 対称性の「担い手」はすべてハドロンの素(もと)となる要素として新たに導入しなければならなかったのである．それがクォークである．坂田模型は SU(3) 対称性を生み，自らを否定して「ハドロンの素粒子」に到達し

たことになる．既存の粒子に対称性をあてはめるのではなく，対称性を表す代数の基本表現であることをその属性とするものによって自然界を構成しようとするのは新しい考え方であった．ここでは「対称性」が存在の物理法則として働いているが，このような見方自体は物理では古くから行われてきたことである．「素粒子」の存在の根拠にされた点が新しいのである．

だとすれば，既知の粒子やそれらの相互作用についても，この新しい考えに基づいてその存在の法則を洗い直して見なければならない．そして，存在の対称性と相互作用のゲージ不変性とは一体となって素粒子を記述する法則となる，という指導原理が弱・電磁相互作用の理論（第6章）の成功をもたらした．この場合，この原理が観測される素粒子にそのまま現れるものでなく，物理的真空の状態の対称性が第7章に説明するヒッグス機構によって破られる効果が組み合されることによって，観測されるるような物理的性質が示されるのである．この機構の担い手となるヒッグス粒子はゲージ原理に従わず，もっぱら対称性の自発崩壊を実現する働きをもつので，「素粒子」の概念から見てその正体が何であるかは未知である．

真実の姿を求めて

クォーク模型に話を戻そう．その発見のきっかけとなったSU(3)対称性は，その後3種の重いクォーク（チャーム，ボトム，トップ．第1章の表1.1）が追加された今日では当初の意味を失い，その代りすべてのクォークのもつ「色（カラー）」自由度の対称性に転用された．クォークの相互作用はこの対称性に従うゲージ理論——すなわち量子色力学（quantum chromo dynamics）——として確立されている．この理論が生れたのは1970年代の初めであるが，有力な実験的裏付けとなったのがパートンモデル（第10章（ハドロンの現象論）の10.2節）である．クォークも，量子色力学のゲージ粒子グルーオンも，ハドロンの構成要素としてハドロンの内部に閉じ込められており，粒子とし

て外部に取り出すことは現在の実験手段では不可能である．しかし，粒子の内部の電荷分布を調べると，その電荷は内部にあるいくつかの点状粒子に集中しているかのように見える．また，電子・陽電子の衝突で発生するハドロンは，あたかも衝突地点でクォーク・反クォークの対発生を引き金として生成されたようにふるまう．それのみではない．衝突のエネルギーを高くしてゆくと，クォーク・反クォークの対には当初の 3 種類の軽いクォークのほかに，この模型の自然な拡張として予言された重いクォークも発生するのである．これらの質量は非常に重く，最近話題となっているトップクォークの質量は実験家の推定によれば核子の 100 倍を超えている（第 10 章 10.3 節（重いクォーク））．これらの重いクォークは，それぞれの実験的発見よりはるか以前から理論的に予想されていた．この予言はレプトン族との対応関係からきている．標準モデルはクォークとレプトンの種類の数が同一でなければ成立しないからである．

弱・電磁相互作用の統一理論や量子色力学が前述の指導原理に基づいて展開されたとしても，この理論はすべて相対論的場の量子論の掌中にある．フェルミのいったように特に革命的なものと考える必要はない．しかし，標準モデルには実験によって決定されねばならないパラメータがたくさん含まれている(第 10 章 10.4 節 (標準モデルのパラメータの値)，第 11 章 (クォーク混合))．

陽子，電子，光子のみが素粒子の全世界だと考えられていた 1930 年ごろ，ボーア（N. Bohr, 1885–1962）は，「今後の問題は陽子と電子の質量比と電磁相互作用の結合定数（言い換えれば素電荷の大きさ）を理論的に説明することだ」といったが，説明すべきこの 2 個のパラメータは，現在では 20 個近くに増大した．自然はこれらのパラメータの値を気まぐれに選んでいるのだろうか，あるいはこの中の少数個の値を知れば他の値が導き出されるという仕組が物理法則として内蔵されているのであろうか．これに関する議論を含め，第 12 章（まとめと展望）

の中でいくつかの試みを紹介する．それらは標準モデルを生み出した指導原理に基づき，素粒子と基本的相互作用の多様性をより深いレベルで統一しようとする模索の一端である．

素粒子物理の歴史を振り返って痛感させられるのは，新たな理論を開拓するにあたって，古い先入観に気づきこれを克服することがいかに難しいかということである．擬人的な表現が許されるならば，自然は狡智にたけた女神のようであって，人間の誤った固定観念に乗じてその真実の姿を隠そうと試みてきた．将来もまたそうであろう．標準モデルは，自然に学びつつその狡智を見破ることに大きな成功を収めたが，自然の真実の姿を明るみに出すべく，さらに大きな一歩を進める研究はようやく緒についたばかりである．

1　素粒子と相互作用

1.1 素　粒　子

「素粒子」とは物質を構成する最小単位のことである．物質は分子からなり，分子は原子からなり，原子は原子核とそのまわりを回る電子からなる．原子核は陽子と中性子からなる．陽子と中性子は**クォーク**とよばれる粒子で構成されている．クォークの構成要素は何か．現在のところまだ確定的な答はない．このように物質の構成要素を究極まで押し進めたものが素粒子である．したがって必然的に「素粒子」は歴史の関数となる．19世紀には原子が素粒子であった．20世紀前半における素粒子は電子，陽子，中性子，および π 中間子等であった．現在，素粒子はクォークまで達している．最終的に「一元論」すなわち究極の素粒子から出発して単一の原理ですべての自然現象を説明しようという夢を「素粒子論」とよぶ．明らかにこの試みは科学が進歩する限り終ることはない．素粒子論は，永遠に未完成な，自然に対する人類の限りなき挑戦である．

夢を離れて現実に戻ろう．現在知られている素粒子を表1.1にまとめておく．

表 1.1　素粒子表

物質粒子

	Q	世代 I	世代 II	世代 III
クォーク (q)	$+\frac{2}{3}e$ $-\frac{1}{3}e$	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$×3 カラー
レプトン (l)	0 $-e$	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$

媒介粒子

γ ; g ; W^+, W^-, Z^0

ヒッグス粒子

H

1.1.1 クォーク

陽子や中性子はクォーク (q) 三つからできている．一般にクォーク三つからなる粒子を重粒子または**バリオン** (B) とよぶ．$B=(qqq)$．クォークはその量子数の違いに応じて 6 種類あり*)，これを**フレーバー**（香り）とよぶ．フレーバーはそれぞれ u（アップ），d（ダウン），c（チャーム），s（ストレンジ），t（トップ），b（ボトム）と名前がついている．これら六つのクォークは，電子の電荷を $-e$ として，電荷 Q が $+(2/3)e$ のものと $-(1/3)e$ の 2 種類に分けられ，この二つが二重項を作っている（「二重項」の正確な意味は3.6.3項を参照）．二重項は三つあり，これらを**世代** (family または generation) によって区別する．これらのクォークを三つ組み合せることによって種々のバリオンが作られる．例えば陽子 p は二つの u クォークと一つの d クォークから作られる．$p=(uud)$．同様に中性子 $n=(udd)$ である．陽子と中性子をまとめて核子とよぶが，核子より重いバリオンを特にハイペロンとよぶ．例えば $\Sigma^+=(uus)$，$\Lambda_c{}^+=(udc)$ 等である．ある与えられた素粒子に対し

*) 6 番目のクォーク t は 1995 年現在，まだ完全な形で認められていないが，ここに入れておく．章末の文献 1) を参照．

て電荷のような量子数の符号をすべて逆にしたものを反粒子とよぶ．クォーク q の反粒子を $\bar{q}$ と表したとき，q と $\bar{q}$ から作られる粒子を中間子または**メソン** (M) とよぶ．$M=(q\bar{q})$．例えば $\pi^+=(u\bar{d})$，$K^-=(\bar{u}s)$ 等である．このようにクォークの組合せで作られる粒子を**ハドロン**とよぶ．クォークは単独に存在することはなく，実験室で実際に観測されるのはバリオンやメソンのようなハドロンである．

クォークにはさらに**カラー** (色) の量子数が与えられている．カラーは3色あり，それぞれ赤 (r)，緑 (g)，青 (b) である．すなわちクォークはその香りと色によって類別される．これらの物理的意味については9章で議論する．

1.1.2 レ プ ト ン

ハドロンと異なり，電子のように強い相互作用をもたない粒子は，それ自体構造のない素粒子と見なされる．このような粒子を総称して**レプトン** (l) とよぶ．電子 e^- にはそれに対応するニュートリノ ν_e があり，この二つで2重項を作っている．クォークと同様にレプトンも3世代をもっている(表1.1)．

1.2 相 互 作 用

上に述べたクォークやレプトンのような素粒子の間にはどのような力が働くのか，またこの力が巨視的な物質に働く力とどのように結びつくのかをこの本で追究してゆく．

素粒子間の力と書いたが，この「力」とは何だろう．「二つの素粒子 A と B の間に力が働く」という文章は何を意味するのか．

A が B になんらかの働きかけをする (作用)．それに対して B が A に働き返す (反作用)．これによって A と B の間に一つの結びつきができるが，これが力である．すなわち力とは相互作用である．相互作用はそれを媒介する粒子によって記述さ

れる．自然界に存在する相互作用は，電磁相互作用，強い相互作用，弱い相互作用，重力相互作用に分類される．

1.2.1　電磁相互作用

二つの荷電粒子の間にはクーロン力が働くが，これを**フォトン**（光子，記号 γ で表す）の交換によって表す（図 1.1(a)）．荷電粒子はそのまわりに電磁場を生み出すが，この電磁場を量子化したものがフォトンである．一方の荷電粒子がフォトンを放出し，このフォトンをもう一方の荷電粒子が吸収する．これによって二つの荷電粒子の間に結びつきができる．これが電磁相互作用である．相互作用の強さは**結合定数**で表すことができる．電磁相互作用の場合，結合定数は粒子の電荷そのものである．クーロン力は二つの粒子の電荷の積に比例するから，電子電荷 $-e$ の 2 乗と，プランク定数 $\hbar$，光速度 c を用いて無次元量 α を作ると，この α が電磁相互作用の大きさを特徴づける量となる．

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137} \qquad (\varepsilon_0 \text{ は真空の誘電率}) \tag{1.1}$$

α を**微細構造定数**とよぶ．

電磁場を量子化してフォトンを作り，荷電粒子の相互作用をフォトンの交換によって記述する力学を**量子電気力学**（Quantum Electro Dynamics，略して **QED**）とよぶ．図 1.1(a)では最も簡単なフォトン 1 個の交換を考えたが，多数のフォトンを複雑に交換する過程が考えられる．QED の特徴は式（1.1）か

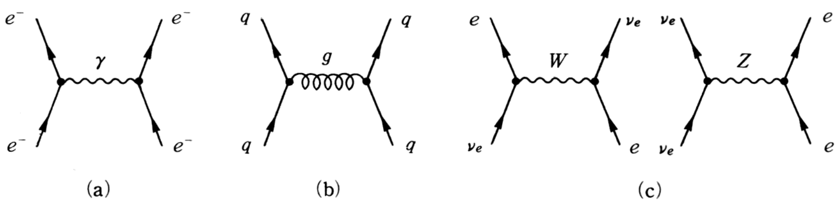


図 1.1　素粒子の相互作用．（a）電磁相互作用，（b）強い相互作用，（c）弱い相互作用．

らわかるように $\alpha \ll 1$ のために，より複雑な過程の寄与がどんどん小さくなる，すなわち摂動論が適用できることである．

1.2.2 強い相互作用

クォーク間に働く相互作用を強い相互作用といい，その媒介粒子を**グルーオン** (g) とよぶ（図 1.1(b)）．上に述べたようにクォークは色の量子数をもつから，この場合の結合定数は色電荷となる．色は 3 種類あるので $3 \times 3 - 1 = 8$ 通りの結合の仕方がある (なぜ 1 を引くのかについては後述)．したがってグルーオンは 8 種類あることになる．クォークは単独に存在することはなく，現実にはこれらを組み合せたバリオンやメソン，すなわちハドロン間の力を考えることになるが，式 (1.1) にならってその大きさを求めると $\alpha_{\mathrm{strong}} \sim 14$ となり，電磁相互作用の強さの 1000 倍以上となる．すなわち“強い”相互作用である．もともとハドロンという言葉は“強い相互作用をする粒子”という意味をもっている．$\alpha_{\mathrm{strong}} \gg 1$ であるから QED と異なり，摂動展開が使えない．しかしクォークのレベルでは後に述べる**漸近的自由**という特徴のために計算が可能となる．クォーク間の力をグルーオンの交換によって記述する力学を**量子色力学** (Quantum Chromo Dynamics, 略して **QCD**) とよぶ．

1.2.3 弱い相互作用

一方，レプトン間に働く力を弱い相互作用とよぶ．もともとこれは素粒子の崩壊を記述する力学であった．例えば中性子の β 崩壊 $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ において n, p, e, ν の四つの粒子の間に働く力を考える．結合の強さは陽子質量を m_p として $G_{\mathrm{weak}} \sim 1.02 \times 10^{-5}/m_p{}^2$ となる．これは十分“弱い”から，一見，摂動論が使えそうに見えるがそうはゆかない．摂動の高次の項を考えて反応確率を計算すると無限大が出てきてこれが除去できないのである．これを**くりこみ不可能**とよぶ．くりこみ可能な弱い相互作用の理論は**ゲージ理論**によって解決されることが

't Hooft たちによって示された．ゲージ理論とは何かをこの本で以後見てゆく．ゲージ理論では弱い相互作用を媒介する粒子は W^+，W^-，および Z^0 の三つである(図 1.1(c))．

1.2.4　重力相互作用

重力は人類にとって太古から知られている最もなじみ深いものである．ところがこれが実は最もやっかいな代物であり，古典論は別として，重力場の量子論はいまだに完成していない．その完成は現代物理学者の悲願であり，21 世紀への最大の遺産である．一番の問題は重力が本質的に非線形現象だということにある．幸いなことに重力はミクロなレベルでは非常に弱い．例えば 10^{-15} m 離れた二つの電子の間に働く重力とクーロン力の比をとると，その値は 10^{-43} となり，重力はまったく無視してよい．重力の量子論がどのようなときに利いてくるかを見よう．ニュートンの万有引力定数 G とプランク定数 $\hbar$，および光速 c から長さの次元をもつ量 l_{P} を作る．これを**プランク長**とよぶ．

$$l_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.62 \times 10^{-35}\,[\mathrm{m}] \tag{1.2}$$

すなわち 10^{-35} m 以下の超ミクロの世界になると重力の量子論が無視できなくなる．これをエネルギーに換算すると 10^{19} GeV (1 GeV$=10^9$ eV)，温度に換算すると 10^{32} K，時間に換算すると 10^{-44} sec となる（与えられた量に対して $\hbar$，c およびボルツマン定数 k を適当に掛けると，ある量を種々の次元をもつ量に換算できる．1.5 節を見よ）．したがって宇宙の最初期，ビッグバンから 10^{-44} sec 以前の超高温度の宇宙においては重力の量子論が大きな役割を果す．本書ではそのような超々高エネルギー，超々ミクロの世界は議論しない．したがって以下では重力相互作用は無視する．

1.3 素粒子の統一モデル

表 1.1 を見ると，クォークの数は二重項が三つに色の自由度が三つで計 18 個，レプトンは 6 個，媒介粒子はグルーオンの 8 個を考慮して 12 個，これに 7 章で議論するゲージ理論を現実のものとするために必要な**ヒッグス粒子**を加えて，計 37 個の素粒子があることになる．これではとても素粒子論のめざす「一元論」には程遠い．なんらかの交通整理が必要である．そのための指導原理が二つある．

1.3.1 対　称　性

例として xy 平面内のベクトル $\boldsymbol{A}$ を考えよう．$\boldsymbol{A}$ が“横”を向いていれば $\boldsymbol{A}_1=(A, 0)$，“縦”に向いていれば $\boldsymbol{A}_2=(0, A)$ である．この限りでは $\boldsymbol{A}_1 \neq \boldsymbol{A}_2$ であり，$\boldsymbol{A}_1$ と $\boldsymbol{A}_2$ は別のものと考えられる．しかし**対称性**があるときは話が変る．例えば磁場を一定方向にかけたとき，磁石の向きが磁場の方向を向くかその逆方向を向くかでエネルギーが異なる．一方，磁場がかけられていないときは磁石がどちらを向いていてもエネルギー的には同等であり，これを磁石の向きについて対称性があるという．この場合，「上」を向いた磁石と「下」を向いた磁石の 2 種類があるのではなく，一つの磁石があるといってよい．対称性を最大限にとることによって表 1.1，は“クォーク q とレプトン l がある”と読むことができる．対称性の数学を群論というが，本書ではこの群論を勉強してゆくことになる．

1.3.2 エネルギー依存性

強磁性体は低温では電子スピンが 1 方向にそろった状態にあるが，キュリー温度以上になるとスピンがばらばらに任意の方向を向いた常磁性体になる．すなわちエネルギーが高くなると対称性が復活する場合がある．式 (1.1) に与えた電磁相互作用の

強さ α も実は定数ではなく，エネルギーの関数であることが後に示される．他の相互作用についても同様である．したがって種々の相互作用があるように見えるのは低エネルギーにおいてであり，実は高エネルギーでは単一の相互作用で素粒子が記述され，低エネルギーではたまたま種々の相が見えるのだという立場をとることができる．実際，電磁相互作用と弱い相互作用は 100 GeV 程度のエネルギーになると一つの相互作用に統一される．これをワインバーグ-サラム理論とよぶ．さらに 10^{16} GeV 以上の高エネルギーになると強い相互作用も同じ一つの相互作用にまとめられる可能性が出てくる．すなわちクォークとレプトンが一つにまとめられる．これを大統一理論（Grand Unified Theory，略して **GUT**）とよぶ．最終的に重力まで含んだ超大統一理論が完成すれば，悲願であった素粒子論の一元論となる（表 1.2）．これについては本書の最後（12 章）で議論する．

表 1.2　素粒子の相互作用と統一モデル

		媒介粒子	統一モデル		
1	重力相互作用				超大統一モデル(?)
2	弱い相互作用	$W^{\pm}, Z^0$	ワインバーグ-サラム	GUT	
3	電磁相互作用（QED）	γ			
4	強い相互作用（QCD）	g			
			10^2 GeV	10^{16} GeV	10^{19} GeV

1.4　ゲージ理論

素粒子相互作用を記述する方法はいろいろあるが，本書では現在最も標準的な**ゲージ理論**による方法を採用する．量子力学における波動関数は，その絶対値の 2 乗が観測に直接結びつく確率解釈を与えるので波動関数の位相は不定である．**ゲージ不変性**とはこの位相変換不変性を一般化したものである．ゲージ理

論とは**相対論的場の量子論**にこのゲージ不変性を取り入れて定式化することである．ゲージ理論の筋道をここでまとめておこう．

まずクォークおよびレプトンに対する相互作用のない自由場のラグランジアンを与える．これはくりこみ可能性と大域的な対称性から決まる．次にこの対称性を局所対称性（＝局所ゲージ不変性）に一般化する．すると**ゲージ場**が自然に導入され，このゲージ場ともとの物質場との相互作用が一意的に決まる．相互作用がわかると現象論を作ることができて，その結果を加速器等の実験によって検証する．本書を最後まで読み通し，この 1.4 節で述べた文章を読み直して「なるほど」と納得できれば，本書の目的は達成されたことになる．

1.5　単位系と記号法

本書では**自然単位系**，すなわち $c=\hbar=1$ の単位系をとる．これによって任意の物理量を長さの次元 L で表すことができる．例えば

$$\text{時間}\quad t\,[T]=ct\,[L] \tag{1.3}$$

$$\text{質量}\quad \frac{1}{m}\,[M^{-1}]=\frac{1}{mc^2}\,[E^{-1}]=\frac{\hbar}{mc}\,[L] \tag{1.4}$$

特に，重要な関係式として

$$1=\hbar c=197\,[\mathrm{MeV\cdot fm}]\qquad (1\,\mathrm{fm}=10^{-15}\,\mathrm{m}) \tag{1.5}$$

を覚えておくと便利である．例えば質量を長さに換算するには

$$\begin{aligned} mc^2=1\,[\mathrm{GeV}]\quad\longleftrightarrow\quad \lambda &= \frac{\hbar}{mc}=\frac{\hbar c}{mc^2}\\ &= \frac{197\,[\mathrm{MeV\cdot fm}]}{1\,[\mathrm{GeV}]}\\ &= 1.97\times10^{-16}\,[\mathrm{m}] \end{aligned} \tag{1.6}$$

である．

この単位系で特殊相対論は次のようにまとめることができる．

座標　$x^\mu(t, x, y, z)$ (1.7)

4元ベクトル　$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$

$$A_\mu = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) \quad (1.8)$$

微分　$\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$：$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$，$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$ (1.9)

ローレンツ不変量：

任意の二つの4元ベクトル A^μ，B^μ に対して

$$A \cdot B = \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \quad (1.10)$$

特に　$k \cdot x = k^0 t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}$ (1.11)

また，4元運動量 $p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$ に対して

$$p^2 \equiv \sum_{\mu=0}^{3} p^\mu p_\mu = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2 \text{（質量）} \quad (1.12)$$

同じ添字が上下に表れたときは，その添字について和をとることと約束する．

$$A^\mu B_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu \quad (1.13)$$

したがって

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \equiv \Box \text{（ダランベルシアン）} \quad (1.14)$$

また，ギリシア文字の添字 μ，ν，ρ，…… は 0，1，2，3 を表し，ラテン文字 i，j，k，…… は 1，2，3（空間成分）を表す．

以下で波動関数を $\psi(x)$ と書くとき，x は単なる x 座標のことでなく，一般の x^μ のことである．

また，x^μ に対して座標変換を行った際に，変換後の座標 $(x^\mu)'$ を $x^{\mu'}$ と書くことにする．$x^{\mu'}$ は x の μ' 成分ではないことに注意．

参考文献

1)　Abe, F. *et al.*: Phys. Rev. **D 50**, 2966 (1994).

2 粒子と場

2.1 場とは何か

距離 r 離れた二つの電荷 q，Q の間に働くクーロン力 $\boldsymbol{F}$ は

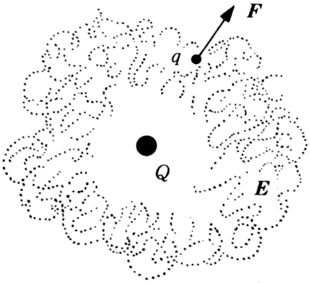
$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2.1}$$

で与えられる．これは遠隔作用である．つまり真空中で遠く隔たった二つの粒子の間に力が働くことを意味する．電場 $\boldsymbol{E}$ を導入し，

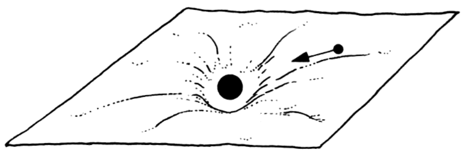
$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2.2}$$

と書き直す．この式を解釈する場合に $q=1$ とおくと $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}$ となるから，“電場は単位電荷に働く力である”という言い方をするが，これでは場を導入したことになっていない，式（2.2）はまったく新しい立場にたって力を見直しているのだということに気づかねばならない．何もない真空中に電荷 $\boldsymbol{Q}$ を置くと，そのまわりの空間には“ゆがみ”が生じる．このゆがみを「場」とよぼう．このゆがんだ空間にさらに電荷 q を置くと，q には**その点における**ゆがみに応じて力が働く（図 2.1(a)）．遠隔作用のような神秘思想は入ってこないことに注意しよう．これが場を導入する意味である．もう一つ例を挙げよう．大きなふろ

しきを広げ，周辺をピーンと引っ張って平らにしておく．これがふろしきにとっての真空である．ふろしきの中央に石を一つ置く．ふろしきはこの石の重みでゆがみを生じる．ここにさらに別の石を置くと，この石はこれを置いた点のゆがみに応じて動き出す（図 2.1(b)）．“真空からのゆがみ”という言葉はどう解釈できるか．物理における真空とはエネルギーの基底状態のことである．真空からのゆがみとは，したがってエネルギーの励起状態に対応する．電荷 Q を置くことによってそのまわりの空間がエネルギー的に励起した状態になる．これを電場によって表す．ふろしきの場合はふろしき場である．



(a) 電　場



(b) ふろしき場

図 2.1　電場とふろしき場

粒子があるということはそのまわりに場があるという主張と同じことになる．したがって粒子と場は同等であるといってよい．粒子間の相互作用は一方の粒子の作る場が他方の粒子に影響を及ぼすことである．さらに，場を量子論で扱い（場の量子化）媒介粒子の形にする．これが**場の量子論**である．

2.2　電磁場の古典論

2.2.1　マクスウェル方程式

場の考え方とその手法をさらに理解するために，電磁気学の古典論を復習しておこう．電荷密度 ρ，電流密度 $\boldsymbol{j}$ が与えられた

とき，マクスウェル方程式は $c=1$ の単位系で

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{2.3}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{2.4}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.5}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{j} \tag{2.6}$$

$$(\varepsilon_0\mu_0 = 1)$$

である．式 (2.4) と式 (2.5) は $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ がポテンシャル ϕ，$\boldsymbol{A}$ で書けることを意味し，

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi \tag{2.7}$$

と書くことができる．式 (2.7) を式 (2.3) と式 (2.6) に代入して書き直すと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{j} \tag{2.9}$$

ここで 4 次元表示，$A^\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$，$j^\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$，および $\partial_\mu = (\partial/\partial t, \nabla)$ を導入すると式(2.8)と式(2.9)は一つにまとまり，

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = \frac{1}{\varepsilon_0} j^\mu \tag{2.10}$$

と，相対論的に共変な形に書ける．

2.2.2 プロパゲーター

式 (2.10) の解釈と電磁場 A^μ の量子化がこれからの主目的となるのだが，ここではそれを後回しにして特別な場合をとって議論しよう．すなわち静電磁場 $(\partial/\partial t = 0)$ を考える．

式 (2.10) で $\partial/\partial t = 0$ とおき，$\mu = 0$ 成分をとるとポアソン方程式

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{2.11}$$

が得られる．$\boldsymbol{r}\to\infty$ で $\phi\to 0$ となる解は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r}' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{2.12}$$

で与えられる．

ここで次式で定義される関数

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \equiv -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{2.13}$$

を導入すると $\Delta(1/r)=-4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$ を用いて式 (2.11) と式 (2.12) は

$$\begin{cases}\Delta G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ \Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho\end{cases}$$

$$\longrightarrow \phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3\boldsymbol{r}' G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\left[-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}')\right] \tag{2.14}$$

と書ける．式 (2.14) の意味は次の通りである．点 $\boldsymbol{r}'$ に 1 という source（ソース）があるとき，その影響が点 $\boldsymbol{r}$ に G で伝わる（図 2.2(a)）．空間に source が $-\rho(\boldsymbol{r}')/\varepsilon_0$ と分布しているとき，その影響が点 $\boldsymbol{r}$ にこれらの重ね合せとして伝わる（図 2.2(b)）．この意味で G を**プロパゲーター**（伝播関数，あるいはグリーン関数）とよぶ．

後々の応用のためにここで一般に微分方程式の解法を述べておく．与えられた関数 f に対して方程式

$$L(\partial)\varphi(x) = f(x) \tag{2.15}$$

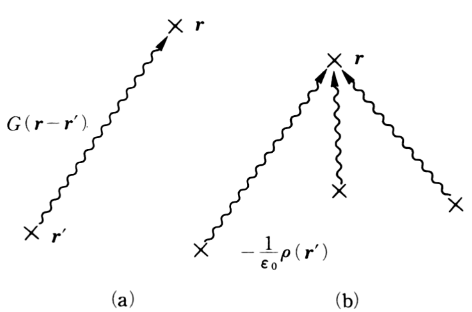


図 2.2　プロパゲーターとその重ね合せ

を満足する φ を求める問題を考える．$L(\partial)$ は微分演算子で表される任意の形をとる．式 (2.15) に対応して右辺の f をデルタ関数でおき換えた方程式

$$L(\partial)\,G(x-x') = \delta(x-x') \tag{2.16}$$

を作る．式 (2.16) において G はプロパゲーターである．したがってこれを解いて G を求めれば式 (2.15) の解は

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \int \mathrm{d}x'\,G(x-x')\,f(x') \tag{2.17}$$

と求められる．ここで微分方程式の一般論に従って式(2.15)の右辺をゼロとおいたときの一般解 $\varphi_0(x)$ を加えてある．$\varphi_0(x)$ は境界条件から決める．ではこの G はどうやって求めるか．

式 (2.16) のフーリエ変換をとる．一般に $F(x)$ のフーリエ変換を $\tilde{F}(p)$ と表す．

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}p\,\tilde{F}(p)\,e^{ipx} \tag{2.18}$$

デルタ関数のフーリエ変換が1であることに注意して式 (2.16) のフーリエ変換は

$$L(ip)\,\tilde{G}(p) = 1, \qquad \therefore \quad \tilde{G}(p) = \frac{1}{L(ip)} \tag{2.19}$$

$\tilde{G}(p)$ に逆フーリエ変換をほどこすと $\tilde{G}(x)$ が求められる．

特に，上のポアソン方程式(式(2.11))の場合にはプロパゲーター $\tilde{G}(\boldsymbol{p})$ は

$$\Delta G(\boldsymbol{r}) = \delta^3(\boldsymbol{r}) \quad \longrightarrow \quad \tilde{G}(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{\boldsymbol{p}^2} \tag{2.20}$$

である．このフーリエ変換をとると式 (2.13) が得られる．

問題　与えられた $\rho(\boldsymbol{r})$ に対して，方程式

$$(\Delta - m^2)\,\phi(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.21}$$

のプロパゲーターは

$$\tilde{G}(\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \tag{2.22}$$

したがって

$$\tilde{G}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi r}e^{-mr} \quad \text{(湯川ポテンシャル)} \tag{2.23}$$

で与えられることを示せ．

式 (2.21) は非相対論における質量 m の π 中間子の波動方程式であり，式 (2.23) は核力ポテンシャルに対応する．e^{-mr} の形から核力の到達距離は $m^{-1}=\hbar/mc$ であり，これは核力を媒介する π 中間子のコンプトン波長に等しく，同時に原子核の大きさに対応する．逆に式 (2.11) は式 (2.21) で $m=0$ とおいたものに等しいから，媒介粒子（フォトン）の質量がゼロでポテンシャルが $1/r$ の遠距離力となることを表している．

2.2.3 ゲージ変換

式(2.10)に戻って，これを解きやすい形に書き直す．式(2.7)で定義されたポテンシャル ϕ，$\boldsymbol{A}$ には不定性がある．実際に観測される場は電場 $\boldsymbol{E}$ および磁場 $\boldsymbol{B}$ であるから，同じ $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ を与えるポテンシャルであれば結果は変らない．すなわち，任意の関数 $\Lambda(x)$ を用いて

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,\Lambda \tag{2.24}$$

あるいは 4 次元表示で

$$A^{\mu} \longrightarrow A^{\mu\prime} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\Lambda \tag{2.25}$$

とおいても式 (2.7) の $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ は不変である．式 (2.25) を**ゲージ変換**とよぶ．また，理論がこの変換の下で不変であることを**ゲージ不変性**とよぶ．

Λ を適当に選んで変換後の $\boldsymbol{A}$ が

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0 \tag{2.26}$$

を満足するようにしよう（**クーロン・ゲージ**．式(2.24)より $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}' = \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} + \Delta\Lambda$ だから，$\Delta\Lambda = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ を満足するように Λ をとる)．このとき式(2.8)と式(2.9)は

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{2.27}$$

$$\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{j}+\mathrm{grad}\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{2.28}$$

となる．特に真空中（$\rho=\boldsymbol{j}=0$）では

$$\phi = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\boldsymbol{A} = \Box\boldsymbol{A} = 0 \tag{2.29}$$

になる．式（2.29）は波動方程式であり，その解は電磁波を表す．式（2.29）より $\phi = 0$ であり，また 3 成分をもつベクトル場 $\boldsymbol{A}$ には式（2.26）の条件が課せられるから，結局電磁場の自由度は 2 となる．これは電磁波が横波であることに対応する．偏光の自由度が 2 であるといってもよい．

2.3　電磁場の量子化

2.3.1　正 準 量 子 化

波動方程式（2.29）の解は平面波の重ね合せで書くことができる．簡単のため，一つの偏光の自由度に限定して話を進める．最終的には独立な二つの偏光に対して和をとればよい．

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k})[a(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}] \tag{2.30}$$

ここで式(2.29)より $k^2 = k^\mu k_\mu = 0$，したがって $k^0\equiv\omega=|\boldsymbol{k}|$ である．因子 $[2\omega(2\pi)^3]^{-1/2}$ は後の式が簡単になるように入れてある．$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{A}$ の振動方向を表す偏光ベクトルであり，$\boldsymbol{\varepsilon}^2=1$，$\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{k})=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k})$ とする．また，式（2.26）より

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{2.31}$$

を満足する．$\boldsymbol{k}$ が波の進行方向のベクトル，$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k})$ が波の振動方向を表すベクトルだから式（2.31）は電磁波が横波であることを表している．

式(2.30)を量子化しよう．そのためにはラグランジアンを導入する必要がある．いまは source のない自由場を考えているから式（2.10）は右辺の j^μ をゼロとおいて

$$\Box A^{\mu}-\partial^{\mu}(\partial_{\nu}A^{\nu})=0 \tag{2.32}$$

これはラグランジアン密度として

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \qquad (F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}) \tag{2.33}$$

をとり，オイラー方程式から導くことができる．

問題 式 (2.23) からオイラー方程式を作り，式 (2.32) が導かれることを示せ．なお，ラグランジアンおよびオイラー方程式については次章でくわしく述べる．

---

2 階の反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ を**場の強さ**とよぶ．実際，その成分は電場および磁場を与える．

$$\begin{aligned}
F_{0i}&=\partial_0A_i-\partial_iA_0=-\partial_0A^i-\partial_iA^0=\left(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\mathrm{grad}\,\phi\right)^i\\
&=E^i\\
F_{ij}&=\partial_iA_j-\partial_jA_i=-(\partial_iA^j-\partial_jA^i)=-\varepsilon_{ijk}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})^k\\
&=-\varepsilon_{ijk}B^k
\end{aligned}$$

$$(\varepsilon_{ijk}\ \text{は}\ i, j, k\ \text{に対して完全反対称，}\ \varepsilon_{123}=+1) \tag{2.34}$$

式 (2.33) のラグランジアンは $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ を用いて

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}&=-\frac{1}{2}F^{0i}F_{0i}-\frac{1}{2}F^{ij}F_{ij}=+\frac{1}{2}(F_{0i})^2-\frac{1}{2}(F_{ij})^2\\
&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

である．

ラグランジアンが与えられたから，A_{μ} の正準共役運動量 π^{μ} が求められる．

$$\left.\begin{aligned}
\pi^0&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0}=0\\
\pi^i&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_i}=-\partial_0A^i-\partial_iA^0=E^i
\end{aligned}\right. \qquad \left(\dot{A}\equiv\frac{\partial A}{\partial t}\right) \tag{2.36}$$

これからハミルトニアン密度が得られる．

$$\mathcal{H}=\pi^{\mu}\dot{A}_{\mu}-\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2)+\boldsymbol{E}\cdot\nabla\phi \tag{2.37}$$

ハミルトニアンはこれを積分して（式(2.37)の最後の項は部分積分と $\rho=0$ に対するマクスウェル方程式（2.3）からゼロになる），次のようになる．

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x\,(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{B}^2) \tag{2.38}$$

式（2.36）から $\pi^0=0$，$\pi^i=-\dot{A}^i\,(\phi=0)$ だから，結局電磁場に対する量子化条件は，量子力学における量子化条件にならって（$[A, B]\equiv AB-BA$）

$$[A_i(\boldsymbol{x},t),\, \pi^j(\boldsymbol{x}',t)] = i\delta_{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{2.39}$$

あるいは

$$\begin{aligned}&[A^i(\boldsymbol{x},\, t),\, \dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)] = i\delta^{ij}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\ &\text{他の交換関係はすべてゼロ}\end{aligned} \tag{2.40}$$

となる，として一見よさそうに見えるが，実はこれは矛盾を含んでいる．式（2.26）により式（2.40）の左辺の div はゼロとなるが，右辺の div はゼロにならない．したがって右辺の div がゼロとなるように交換関係を書き直す必要がある．

デルタ関数のフーリエ変換

$$\delta^3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{k}\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{2.41}$$

の両辺を x^i で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^3(\boldsymbol{x}) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{k}\; k^i e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{2.42}$$

が得られる．したがって量子化条件として式（2.40）の代りに

$$[A^i(\boldsymbol{x},\, t),\, \dot{A}^j(\boldsymbol{x}',\, t)] = i\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\left(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{\boldsymbol{k}^2}\right) \tag{2.43}$$

とすればよい．これでたしかに右辺の $\sum_i \partial/\partial x^i$ をとると式（2.42）を用いて

$$\sum_i k^i\left(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{\boldsymbol{k}^2}\right) = 0 \tag{2.44}$$

を与える．因子（$\delta^{ij}-k^ik^j/\boldsymbol{k}^2$）は横波成分を取り出す射影演算子となっている．

式 (2.30) より

$$
\begin{aligned}
&\omega\int \mathrm{d}^3x\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{A}(x) \\
&\qquad = \sqrt{\frac{(2\pi)^3\omega}{2}}\left[a(\boldsymbol{k})+a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{2i\omega t}\right] \\
&i\int \mathrm{d}^3x\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k})\cdot\dot{\boldsymbol{A}}(x) \\
&\qquad = \sqrt{\frac{(2\pi)^3\omega}{2}}\left[a(\boldsymbol{k})-a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{2i\omega t}\right]
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

が得られる．したがって

$$
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3x\ e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k})\cdot[\omega\boldsymbol{A}(x)+i\dot{\boldsymbol{A}}(x)] \\
a^\dagger(\boldsymbol{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3x\ e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k})\cdot[\omega\boldsymbol{A}(x)-i\dot{\boldsymbol{A}}(x)]
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

式 (2.43) を用いて $a(\boldsymbol{k})$ とそのエルミート共役 $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ の交換関係を求めると最終的に

$$
[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')] = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{2.47}
$$

が得られる．同様に

$$
[a(\boldsymbol{k}), a(\boldsymbol{k}')] = [a^\dagger(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')] = 0 \tag{2.48}
$$

が得られる．この辺りの計算は少々面倒であるが難しくはない．読者自ら試みよ．

2.3.2 生成・消滅演算子

一般に演算子 a，$a^\dagger$ に対して

$$
[a, a^\dagger] = 1, \qquad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \tag{2.49}
$$

が成り立つとき，演算子 $N=a^\dagger a$ の固有ベクトルの張る空間がどのようになるかを調べよう．N の固有ベクトルを $|n\rangle$，固有値を n とする．

$$
N|n\rangle = n|n\rangle \tag{2.50}
$$

N はエルミート演算子だからその固有値は実数であり，また，$a|n\rangle$ のノルムは非負だから

$$[a|n\rangle]^\dagger[a|n\rangle] = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = \langle n|N|n\rangle$$
$$= n\ \langle n|n\rangle\ \geqq 0 \qquad (2.51)$$

より $n \geqq 0$ である．$Na|n\rangle$ を作ると式 (2.49) より

$$Na|n\rangle = a^\dagger aa|n\rangle = (aa^\dagger - 1)\,a|n\rangle = [a(a^\dagger a) - a]|n\rangle$$
$$= (n-1)\,a|n\rangle \qquad (2.52)$$

したがって，$a|n\rangle$ は N の固有値が $(n-1)$ の固有ベクトルである．ある与えられた $|n\rangle$ に対して演算子 a を次々に掛けてゆくと N の固有値が一つずつ小さい固有ベクトルが得られるが，固有値が負にならないということから，いつかはこの操作は終りにならなければならない．固有値が最小となる状態，すなわち基底状態を**真空**とよび $|0\rangle$ で表す．定義より

$$a|0\rangle = 0 \qquad (2.53)$$

である．

$$N|0\rangle = a^\dagger a|0\rangle = 0 \qquad (2.54)$$

より，真空は N の固有値がゼロの状態である．

一方，$Na^\dagger|n\rangle$ を作ると，再び式 (2.49) を用いて

$$Na^\dagger|n\rangle = a^\dagger aa^\dagger|n\rangle = a^\dagger(a^\dagger a+1)|n\rangle$$
$$= (n+1)\,a^\dagger|n\rangle \qquad (2.55)$$

となり，$a^\dagger|n\rangle$ は N の固有値が $(n+1)$ の固有状態である．したがって真空 $|0\rangle$ に $a^\dagger$ を掛けて $a^\dagger|0\rangle$ を作るとこれは $n=1$ 状態に対応し，$(a^\dagger)^2|0\rangle$ は $n=2$ 状態に対応する．このように $a^\dagger$ を順次掛けてゆくことによって任意の n の固有状態が得られる．

式 (2.52)，(2.55) から明らかなように a は n を一つ減らす演算子，$a^\dagger$ は n を一つ増やす演算子であるから，それぞれ**消滅演算子**，**生成演算子**とよぶ．また，N は**個数演算子**である．

ハミルトニアン (2.38) に式 (2.30) を代入し，いくらかの計算の後に次式が得られる

$$H = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3k\ \omega[a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}) + a(\boldsymbol{k})\,a^\dagger(\boldsymbol{k})]$$

$$= \int d^3k\ \omega\left[a^\dagger(\boldsymbol{k})\,a(\boldsymbol{k}) + \frac{1}{2}\right] \tag{2.56}$$

$a^\dagger a$ が個数演算子であることを思い出すと，式 (2.56) は電磁場がエネルギー $\hbar\omega$ の粒子の集合であることを意味する．この粒子を**フォトン**（光子）とよぶ．$a^\dagger(\boldsymbol{k})$ は運動量 $\boldsymbol{k}$ のフォトンの生成演算子，$a(\boldsymbol{k})$ は消滅演算子である．式 (2.56) の最後の因子 1/2 はいわゆる零点振動に対応するが定数であるから通常は物理的に無視してもかまわない．

2.3.3 ま　と　め

式 (2.30) の解釈を考えよう．電磁場はそれを量子化することによってフォトンの生成・消滅を記述する演算子で書けることがわかった．一般に波動関数が量子化によって演算子となるとき，これを**場の演算子**とよぶ．場の演算子によって現象を記述しようとするのが場の量子論である．

再び図 1.1 (a) に戻ろう．二つの荷電粒子が相互作用をするとは，一方の粒子の作る場が他方に影響を与えることと考えられるが，この場を量子化することによって相互作用を媒介粒子によって表し，電子 1 がフォトンを放出してそれを電子 2 が吸収する（あるいはその逆）と解釈される．相互作用の強さを決めるのは結合定数である．結合定数は charge（チャージ）ともいう．電磁相互作用の場合の charge は electric charge，すなわち電荷である．

残る問題は，(1) 相互作用の形はどのように決まるのか，(2) この相互作用が一方から他方へどのように伝播するのか，という二つである．(1) については次章で説明するゲージ理論で与えられる．(2) は 2.2.2 項で述べたプロパゲーターがその役割を果すが，ただし因果律を正しく反映した相対論的なプロパゲーターをとらなければならない．これについては 5 章で詳しく議論する．

3　ゲージ理論

3.1　ラグランジアン形式

一般に関数 $\phi(x)$ とその微分 $\partial_\mu\phi$ を含む関数 L をラグランジアンとよび，その時間積分を作用 S とよぶ．単位体積あたりのラグランジアンをラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ で表す．以下ではこの $\mathscr{L}$ を単に ラグランジアンとよぶことにしよう．

$$S=\int L\,\mathrm{d}t=\int\mathscr{L}\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}t=\int\mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\mathrm{d}^4x \tag{3.1}$$

関数 $\phi(x)$ として，場そのものをとる．ここで $\phi(x)$ は一般の場を表すものとする．すなわち $\phi(x)$ はスカラー場，ベクトル場の各成分，スピノール場等を象徴的に表している．

場 $\phi(x)$ の微小変化，すなわち変分 $\delta\phi(x)$ を考える．

$$\phi(x)\quad\longrightarrow\quad\phi'(x)=\phi(x)+\delta\phi(x) \tag{3.2}$$

このとき作用の変化 δS は

$$\begin{aligned}\delta S&=\int\mathrm{d}^4x\,\delta\mathscr{L}=\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right]\\&=\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)\right]\\&=\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\right\}\delta\phi\end{aligned}$$

$$+\int d^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] \tag{3.3}$$

となるが，式 (3.3) の最後の項は表面積分となり，境界では $\delta\phi=0$ と約束すればゼロとなる．変分 $\delta\phi$ に対して作用が不変 ($\delta S=0$) であることを要求すると式 (3.3) の第1項の積分の中のかっこ｛　｝がゼロとなり，オイラー方程式

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=0 \tag{3.4}$$

が得られる．

3.2　中性スカラー場

ラグランジアンは ϕ と $\partial_\mu\phi$ の関数であれば原理的には何であってもよいわけであるが，それから導かれる運動方程式 (3.4) が物理的に妥当となるように選ぶ．例として質量 m の自由スカラー場（相互作用のない場を**自由場**とよぶ）に対するラグランジアンを考える．ϕ と $\partial_\mu\phi$ から作られるローレンツ不変量からなる最も簡単な形として

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.5}$$

をとろう．実際，式 (3.4) にこれを代入すると運動方程式は

$$(\Box+m^2)\phi(x)=0 \tag{3.6}$$

である．これをクライン-ゴルドン方程式とよぶ．式 (3.6) の非相対論的近似 ($c\to\infty$, $\partial^2/\partial t^2=\partial^2/c^2\partial t^2=0$) をとると，湯川ポテンシャルを与える式 (2.21) （の右辺をゼロとおいたもの）に等しく，さらに $m=0$ とおくとスカラーポテンシャルに対するポアソン方程式 (2.27) （の右辺をゼロとおいたもの）になっている．すなわち式 (3.6) は質量 m の自由スカラー粒子に対する相対論的に不変な方程式を与える．$\phi(x)$ のフーリエ変換，つまり $\phi(x)$ を平面波 $e^{ip\cdot x}$ で展開すると式 (3.6) は

$$p^2=m^2,\qquad \text{すなわち}\quad E^2=\boldsymbol{p}^2+m^2 \tag{3.7}$$

となり，たしかに m は質量である．式 (3.7) を**質量殻条件（オ**

ンシェル，on-shell）とよぶ．自由粒子は必ず式（3.7）を満足しなければならない．

$\phi(x)$ に対する正準共役運動量 $\pi(x)$ は

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial[\dot{\phi}(x)]} = \dot{\phi}(x) \tag{3.8}$$

したがってハミルトニアン密度 $\mathscr{H}$ は

$$\mathscr{H} = \pi\dot{\phi} - \mathscr{L} = \frac{1}{2}[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \tag{3.9}$$

である．

量子化条件は $[\phi, \pi] = i$，すなわち

$$\begin{aligned} &[\phi(\boldsymbol{x}, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{x}', t)] = i\,\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \\ &[\phi(\boldsymbol{x}, t), \phi(\boldsymbol{x}', t)] = [\dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{x}', t)] = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

で与えられる．

$\phi(x)$ を平面波で展開すると

$$\phi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}[a(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x}] \tag{3.11}$$

式(3.11)を式(3.10)に代入して 2.3 節で述べた電磁場の量子化とまったく同様の計算を行えば，a，$a^\dagger$ に対する交換関係

$$\begin{aligned} &[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')] = \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \\ &[a(\boldsymbol{k}), a(\boldsymbol{k}')] = [a^\dagger(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')] = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

およびハミルトニアン

$$H = \int \mathscr{H}\,\mathrm{d}^3x = \int \mathrm{d}^3k\,\omega\left[a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + \frac{1}{2}\right] \tag{3.13}$$

が得られる．これがスカラー場の量子化であり，その解釈は電磁場の場合とまったく同じである．

3.3　複素スカラー場

質量の等しい二つの実スカラー場 ϕ_1，ϕ_2 を考えよう．この場合のラグランジアンは

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}m^2{\phi_1}^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \frac{1}{2}m^2{\phi_2}^2 \tag{3.14}$$

で与えられる．ここで

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \qquad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \tag{3.15}$$

とおくと式(3.14)は

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \tag{3.16}$$

と，一つの複素場で表すことができる．これを**複素スカラー場**とよぶ．

ϕ に対する共役運動量 π は

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^* \tag{3.17}$$

であるから，量子化条件は

$$[\phi(\boldsymbol{x}, t), \dot{\phi}^*(\boldsymbol{x}', t)] = i\,\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{3.18}$$

となる．前と同様に ϕ に対する平面波展開を行うと

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}[a(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x} + b^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x}] \\ \phi^*(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}[a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x} + b(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x}] \end{aligned} \tag{3.19}$$

ϕ は複素場であるから a，b 二つのフーリエ係数が必要であることに注意せよ．式(3.19)を式(3.18)に代入して整理すると

$$\begin{aligned} &[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')] = [b(\boldsymbol{k}), b^\dagger(\boldsymbol{k}')] = \delta^\dagger(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \\ &\text{他の交換子はすべてゼロ} \end{aligned} \tag{3.20}$$

が得られる．a と b の 2 種類の演算子の物理的意味は以下で与える．

複素スカラー場の特徴は，定数パラメータ α を用いて変換

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{-i\alpha}\phi, \qquad \phi^* \longrightarrow \phi^{*\prime} = e^{i\alpha}\phi \tag{3.21}$$

の下で式(3.16)の $\mathcal{L}$ が不変となっていることである．式(3.21) の変換は，もとの実場 ϕ_1，ϕ_2 で表すと

$$\begin{cases} \phi_1' = \phi_1 \cos\alpha + \phi_2 \sin\alpha \\ \phi_2' = -\phi_1 \sin\alpha + \phi_2 \cos\alpha \end{cases} \tag{3.22}$$

である．すなわち，ϕ_1 と ϕ_2 で張られる 2 次元平面内のベクトル (ϕ_1，ϕ_2) の，原点のまわりの角度 α による回転に対応している．

ラグランジアン，したがって作用 S がある変換に対して不変であるとき，理論が**対称性**をもつという．対称性があるとどのような結論が出るかを示すのが次に述べる**ネーターの定理**である．

3.4　ネーターの定理

スカラー場に限らず，一般に場を $\phi(x)$ で表し，$\phi(x)$ の変分 $\delta\phi$ を考える．作用 S はこれによって変化を受け

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\,\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\,\delta(\partial_\mu\phi) \right] \\ &= \int \mathrm{d}^4x \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right]\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\partial_\mu(\delta\phi) \right\} \\ &= \int \mathrm{d}^4x\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta\phi \right] \end{aligned} \tag{3.23}$$

ここで 1 行目から 2 行目に移るとき，オイラー方程式 (3.4) を用いた．4 元カレント J^μ を

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta\phi \tag{3.24}$$

によって導入すると式 (3.23) は，ある変分 $\delta\phi$ に対して作用 S が不変に保たれるならば保存カレントがあることを意味する．

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{3.25}$$

このとき

$$Q = \int \mathrm{d}^3x\, J^0 \tag{3.26}$$

を定義すると，式(3.25)を用いて

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}^3x \frac{\partial J^0}{\partial t} = -\int \mathrm{d}^3x\, \partial_i J^i = -\int \mathrm{d}^2\sigma_i\, J^i \Big|_{x^i\to\infty} = 0 \tag{3.27}$$

σ_i は i 方向を法線とする面要素を表す．無限遠方で場が十分速くゼロに近づくとすればこの表面積分はゼロである．すなわち Q は時間によらない一定の値をもつ．

以上をまとめると

“作用 S が，場の，ある変換に対して不変であれば，
対応する保存カレントがあり，保存量が存在する”

となる．不変性は対称性といってもよい．例えば左右の入れ換えに対して不変とは左右対称であるということと同値である．理論が対称性をもつとき，それに対応する保存量がある．これをネーターの定理とよぶ．例えば理論が時間の平行移動に対して不変であるとき，つまり時間の原点の選び方によらない，あるいは昨日の物理と明日の物理が変らないならば，エネルギー保存則が出る．他の例も含めて表 3.1 にまとめておこう．

表 3.1　ネーターの定理

不変性＝対称性	保存量
時間の平行移動	エネルギー
空間の平行移動	運動量
空間回転	角運動量
大域的位相変換	電荷

3.1 節の初めに，ラグランジアンの選び方は原理的に任意であると述べたが，実際は，可能な限り対称性を考慮に入れて保存則が出るように選ぶ．

表 3.1 の最後の例を複素スカラー場に対して示そう．

変換（3.21）を**大域的位相変換**とよぶ．特に α として微小量をとると式（3.21）は

$$\phi \longrightarrow (1-i\alpha)\phi = \phi - i\alpha\phi \equiv \phi + \delta\phi \tag{3.28}$$

すなわち

$$\delta\phi = -i\alpha\phi, \qquad \delta\phi^* = +i\alpha\phi^* \tag{3.29}$$

である．$\delta\mathcal{L} = \alpha\partial_\mu J^\mu$ に対して式（3.24）より（場がいくつもある場合はそれらすべての変分の和をとる），保存カレントは

$$J_\mu = -i[(\partial_\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial_\mu\phi)] \tag{3.30}$$

したがって保存量 Q は

$$Q = \int d^3x\, J^0 = i\int d^3x\,(\phi^*\dot{\phi} - \dot{\phi}^*\phi) \tag{3.31}$$

式(3.31)に式(3.19)を代入し，交換関係（3.20）を用いると結局

$$Q = \int d^3k\,[a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) - b^\dagger(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})] = N_a - N_b \quad (3.32)$$

が得られる．N_a および N_b はそれぞれ量子 a，b の個数演算子である．

式(3.32)はどう解釈できるか．式（3.30）を 4 元電流と見なすと，第ゼロ成分は電荷密度になり，その空間積分 Q は電荷そのものである．すなわち位相変換不変性の仮定から電荷の保存則が出た．逆に電荷の保存則が自然に出るように，ラグランジアンは位相変換の下で不変な形にとらねばならないといえる．式（3.32）において粒子 a と粒子 b では電荷の符号が異なる．a をプラスの電荷の粒子にとると b はマイナスの電荷をもった粒子に対応する．このように量子数の符号が逆の粒子を**反粒子**とよぶ．式（3.19）に戻って複素スカラー場 $\phi(x)$ は粒子を消す，あるいは反粒子を作る演算子になっている（$\phi^*(x)$ は粒子を作り，反粒子を消す演算子になっている）．したがって $\phi(x)$ は量子力学における単純な波動関数と異なり，粒子の生成・消滅を記述する場の演算子である．複素スカラー場 ϕ は電荷をもつ粒子の場を記述するから，これを**荷電スカラー場**とよぶ．それに対して 3.2 節の ϕ を**中性スカラー場**とよぶ．

式（3.16）は自由場のラグランジアンである．Q が実際に電荷そのものであることを示すには電磁場との相互作用を考えなければならない．では一般に相互作用はどのようにして理論の中に組み入れることができるか．これが次の 3.5 節の主題となる．

3.5 局所ゲージ変換

式（3.16）で表される複素スカラー場を再び考える．これは大域的位相変換（3.21）の下で不変である．もともと量子力学では波動関数の絶対値の 2 乗が存在確率を与え，位相そのものは観測量ではないので任意の値をとることができた．場の理論に

移ると，位相不変性は前節で見たように，電荷の保存という物理的要求から必要となる．ここで注意することは位相変換のパラメータ α が定数であるということである．すなわち位相変換はいたるところでまったく同じ形をとる．地球上で角度 α だけ位相を変えると，月でもアンドロメダでも同じ角度 α の位相変換をしなければならない．位相が観測量でないことを考慮すると，これは非常に不自然である．位相 α を時空の関数 $\alpha(x)$ に一般化し，理論が変換

$$\phi(x) \longrightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi(x), \quad \phi^*(x) \longrightarrow e^{+i\alpha(x)}\phi^*(x) \tag{3.33}$$

の下で不変となるようにできないかと考えるのが自然なことである．式 (3.33) の変換を**局所ゲージ変換**とよぶ．

式 (3.16) のラグランジアンに式 (3.33) の変換をほどこしてみよう．このとき ϕ の微分 $\partial_\mu\phi$ は

$$\partial_\mu\phi(x) \quad \longrightarrow \quad e^{-i\alpha(x)}\{\partial_\mu\phi(x)-i[\partial_\mu\alpha(x)]\phi(x)\} \tag{3.34}$$

と変換される．したがって $\partial_\mu\alpha(x)$ の存在のために局所ゲージ変換の下でラグランジアンは不変ではない．

理論が局所ゲージ変換の下で不変となるようにするには微分を修正すればよい．微分 ∂_μ の代りに新しく演算子 D_μ を導入し，ゲージ変換 (3.33) の下で

$$D_\mu\phi \longrightarrow e^{-i\alpha(x)}D_\mu\phi, \qquad (D^\mu\phi)^* \longrightarrow e^{i\alpha(x)}(D^\mu\phi)^* \tag{3.35}$$

となれば $(D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi)$ は不変である．このような D_μ を**共変微分**とよぶ．

共変微分 D_μ は次のように作ることができる．ベクトル場 A_μ を導入し，

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \tag{3.36}$$

とおく．ここで e はある定数である．$\alpha(x)=e\Lambda(x)$ とおくと局所ゲージ変換は

$$\phi(x) \quad \longrightarrow \quad e^{-ie\Lambda(x)}\phi(x) \tag{3.37}$$

$$\partial_\mu\phi(x) \quad \longrightarrow \quad e^{-ie\Lambda(x)}[\partial_\mu - ie\partial_\mu\Lambda(x)]\phi(x) \tag{3.38}$$

と書けるが，このゲージ変換の下で A_μ が

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x) \tag{3.39}$$

と変換されるものとする．式(3.38)と式(3.39)より式(3.36)で定義された D_μ は $\partial_\mu \Lambda(x)$ が打ち消し合ってたしかに

$$D_\mu \phi \longrightarrow e^{-ie\Lambda(x)} D_\mu \phi \tag{3.40}$$

と変換することが容易に確かめられる．したがって複素スカラー場に対するラグランジアン（3.16）において ∂_μ を D_μ でおき換えた

$$\mathscr{L} = (D^\mu \phi)^* (D_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \tag{3.41}$$

が局所ゲージ変換の下で不変なラグランジアンとなる．

式（3.39）の変換は式（2.25）で導入した電磁場のゲージ変換とまったく同じ形をしている．また，式（3.36）の変換は空間成分をとって $\boldsymbol{p} = -i\nabla$ を用いると

$$\boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A} \tag{3.42}$$

に等しい（$A_i = -A^i$ に注意）が，これは電磁場と相互作用をする粒子に対する量子力学でおなじみの式であり，定数 e は粒子の電荷そのものである．したがってここで導入したベクトル場 A^μ は電磁場に等しいと考えられる．

一般に理論が局所ゲージ変換不変となるように微分を共変微分に変え，そのとき導入されたベクトル場を**ゲージ場**とよぶ．特に局所位相変換不変性から導かれたゲージ場は電磁場に等しい．これをさらによく理解するために式（3.41）を展開してみる．$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ を用いて式（3.41）は

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + ieA^\mu [\phi^* \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi)^* \phi] + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \tag{3.43}$$

初めの 2 項は元の自由場のラグランジアンである．第 3 項と第 4 項は元のスカラー場 ϕ とゲージ場の相互作用を与える．特に第 3 項は式（3.30）で定義したネーター・カレント J_μ を用いて $eJ_\mu A^\mu$ と書けるが，これは電磁場 A_μ と 4 元電流との相互作用エネルギーそのものに等しい（source $j_\mu = eJ_\mu$があるときの電磁場のラグランジアンは $\mathscr{L} = -(1/4) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$ で与えられる．これからオイラー方程式を作ると，マクスウェル方程式

(2.10) が導かれる．すなわち J_μ は 4 元電流そのものに等しい)*)．したがってラグランジアンの位相変換不変性の要求から出てきた保存カレントは電流であり，式 (3.31) の保存量 Q はたしかに電荷であることが示された．なお，式 (3.43) の最後の項はゲージ不変性から必要な相互作用項である．第 3 項と第 4 項の相互作用を図 3.1 に示す．

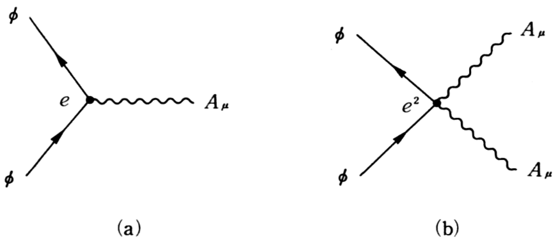


図 3.1　スカラー場と電磁場の相互作用

重要なのは次の点である．もともと式 (3.16) は相互作用のない自由場のラグランジアンである．局所ゲージ変換不変性を要求してラグランジアンを式 (3.41) の形にすると電磁場が自然に導入され，しかも**元のスカラー場と電磁場の相互作用が一意的に決められた**ことになる．

電磁場の自由ラグランジアンも含めて結局，電磁場と相互作用をする複素スカラー場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{3.44}$$

で与えられる．$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は変換 (3.39) の下で不変だから，最後につけ加えた項 $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ がゲージ不変性を保っていることに注意せよ．

素粒子間の相互作用はどのような形をとるのか，という疑問に対して試行錯誤とか天才的ひらめきとかを用いるのではなく，**対称性が相互作用を決定する**のである．これがゲージ理論の最大の特徴であるといってよい．

---

*)　$1/\varepsilon_0$ は電荷の定義に含ませることができる．以後 $\varepsilon_0 = 1$ とおく．

一般の場合についてゲージ理論の方法をまとめておこう．

物質場 Ψ を考える．ここで Ψ はスカラー場とは限らず一般に任意の成分をもった場とする．成分は時空とは限らず，内部空間（これについては次節で述べる）の自由度も含んでいる．Ψ に対する自由場のラグランジアンを書く．次に変換

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = U\Psi \tag{3.45}$$

$$(U^\dagger U = 1, \quad U = e^{-iV}, \quad V^\dagger = V)$$

の下でラグランジアンが不変となるように共変微分 D_μ を導入する．すなわち変換 (3.45) の下で

$$D_\mu\Psi \longrightarrow D_\mu'\Psi' = U(D_\mu\Psi) \tag{3.46}$$

である．ゲージ場 A_μ（これも電磁場と限らず一般に内部空間の自由度をもっている）を用いて

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \tag{3.47}$$

と書くと，条件 (3.46) は A_μ の変換則に書き直されて

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu' = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \tag{3.48}$$

となる．ここで g は結合定数とよばれ，Ψ と A_μ の相互作用の強さに対応する．特に $U = e^{-ie\Lambda(x)}$ のときは $g = e$（電荷）とおいて A_μ は電磁場，式 (3.48) は電磁場のゲージ変換 (3.39) となる．

自由場のラグランジアンにおいて微分 ∂_μ を共変微分 D_μ におき換え，A_μ に対するラグランジアンを加えると，相互作用をする Ψ と A_μ のラグランジアンが求められたことになる．最後に付加する A_μ に対するラグランジアンはゲージ不変性を破らないようにとる必要があるが，その決め方は 3.6 節の終りで述べる．

問題 式 (3.48) を示せ．

3.6 内部対称性

3.6.1 角運動量

相互作用を決めるのは対称性であることを前節で見たが，この節では一般に対称性について調べてゆくことにしよう．最初は量子力学でよく知られている 3 次元空間回転に対する対称性である．波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の回転 R によって

$$\psi'(\boldsymbol{r}) = \psi(R^{-1}\boldsymbol{r}) = U\psi(\boldsymbol{r}) \qquad (U = U(\theta^i) = e^{-i\theta^i L_i}) \tag{3.49}$$

と変換される．θ^i は i 軸のまわりの回転角である．演算子 L_i $(i=1,2,3)$ を回転の**生成元**とよぶ．回転の生成元 L_i は角運動量演算子にほかならない．L_i を用いて式 (3.49) がたしかに回転を与えることは次のようにして示すことができる．

z 軸のまわりの回転角 ε による微小回転を考える (図 3.2)[1]．

$$\begin{aligned} U(\varepsilon)\psi(x,y,z) &= \psi(R^{-1}\boldsymbol{r}) = \psi(x+\varepsilon y, y-\varepsilon x, z) \\ &= \psi(x,y,z) + \varepsilon\left(y\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \\ &= [1 - i\varepsilon(xp_y - yp_x)]\psi \\ &= (1 - i\varepsilon L_z)\psi \end{aligned} \tag{3.50}$$

$L_z = xp_y - yp_x$ は角運動量 $\boldsymbol{L}$ の z 成分である．有限な回転角 θ に対しては $\varepsilon = \theta/n$ とおいて

$$U(\theta) = [U(\varepsilon)]^n = \left(1 - i\frac{\theta}{n}L_z\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-i\theta L_z} \tag{3.51}$$

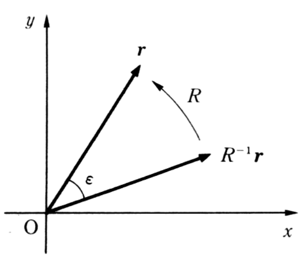


図 3.2　z 軸のまわりの微小回転

となり式 (3.49) が正しいことが確かめられた．

L_i の交換関係は

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k \qquad (\varepsilon_{123} = +1) \tag{3.52}$$

で与えられる．これは $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=-i(\boldsymbol{r}\times\nabla)$ を用いて示すことができるが，これとは独立に，L_i が i 軸のまわりの回転の生成元であるということと，幾何学的な回転による座標変換を結びつけることによっても証明できる[2)]．i 軸のまわりの微小角度 ε による回転を i_ε で表す．例えば 1_ε によって座標は

$$1_\varepsilon:\quad (x, y, z) \longrightarrow (x, y-\varepsilon z, z+\varepsilon y) \tag{3.53}$$

と変化する．式 (3.53) のような変換を続けて実行すると

$$1_\varepsilon \longrightarrow 2_\eta \longrightarrow 1_{-\varepsilon} \longrightarrow 2_{-\eta} = 3_{-\varepsilon\eta} \tag{3.54}$$

がいえる．式 (3.54) は演算子 L_i を用いて

$$(1+i\eta L_y)(1+i\varepsilon L_x)(1-i\eta L_y)(1-i\varepsilon L_x) = 1+i\varepsilon\eta L_z \tag{3.55}$$

と書けるから両辺で $\varepsilon\eta$ の係数を比較して

$$[L_x, L_y] = iL_z \tag{3.56}$$

が得られる．

問題 式 (3.54) を示せ．したがって式 (3.55) の展開から式 (3.56) が出ることを確かめよ (2 次の微小量 ε^2，η^2 は無視するが $\varepsilon\eta$ は残す！)．

L_i が回転の生成元であるということだけから式 (3.52) の関係が得られたから，軌道角運動量から離れて，一般に式 (3.52) を満足する演算子はどんな形をとることができるのかを考える．特別な場合として次の 2 行 2 列の行列 $\sigma_i (i=1, 2, 3)$ をとってみよう．

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

これを**パウリのスピン行列**とよぶ．ただちにわかるように

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2} \qquad (3.58)$$

である．式(3.58)は式(3.52)とまったく同じ形をしている．このように演算子を具体的に行列で表したものを（行列）**表現**とよぶ．

一般に演算子 A と B の反交換子 $AB+BA$ を $\{A, B\}$ と表すことにすると

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \qquad (3.59)$$

である．さらに $s_i = \sigma_i/2$ とおくと

$$[s_i, s_j] = i\varepsilon_{ijk}s_k \qquad (3.60)$$

また，$s^2 = s_1{}^2 + s_2{}^2 + s_3{}^2 = 3/4$ であり，明らかに

$$[s^2, s_i] = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (3.61)$$

が成り立つ，s^2 のようにすべての生成元と交換する演算子を**カシミール演算子**とよぶ．さらに，

$$s_3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = +\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad s_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (3.62)$$

であるから

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

は s_3 の固有ベクトル，s_3 の固有値は $\pm 1/2$ である．

s_1 と s_2 から

$$s_+ = \frac{1}{2}(s_1 + is_2), \qquad s_- = \frac{1}{2}(s_1 - is_2) \qquad (3.63)$$

を定義すると

$$s_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad s_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (3.64)$$

である．

式(3.60)，(3.61)，(3.62)，および(3.64)は量子力学でおなじみの角運動量演算子，L_i，L^2，L_z，および上昇・下降演算子 $L_\pm$ に対応していることがわかる．L^2 の固有値 $l(l+1)$ がいまの場合 $s^2 = 3/4$ であるから $l=1/2$ の角運動量に対応している．これを**スピン**が 1/2 であるという．

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \uparrow, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \downarrow$$

と記号で表すことにすると，スピン 1/2 の系は，何か上下に向きをもつ系を記述しており，演算子を作用させることによって上下が変換するようなもの，という概念を頭に描くことができるであろう．具体的に何が「上」を向くのか，という物理については次節で述べることにし，ここではさらに数学的特徴をまとめておく．

スピン 1/2 の系は非常に面白い性質をもっている．$L_i = \sigma_i/2$ とおいて回転の演算子は

$$U(\boldsymbol{\theta}) = e^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}/2} \tag{3.65}$$

と書ける．例として z 軸のまわりの角度 θ の回転は，$\boldsymbol{\theta} = (0, 0, \theta)$ とおいて指数関数を展開し，$\sigma_3{}^2 = 1$ を用いると

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_3 \sin\frac{\theta}{2} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\theta/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.66}$$

となる．したがって

$$U(2\pi) = -1, \qquad U(4\pi) = 1 \tag{3.67}$$

である．式 (3.67) より 2π 回転しても，元の状態に戻らないことに注意してほしい．

$$U(2\pi)\uparrow \neq \uparrow \tag{3.68}$$

4π 回転，すなわち **2 回**ぐるっと回って初めて元に戻るのである．式 (3.68) のように頭としっぽのある矢印のようなものは必ずそうなるということを納得するために，いくつかの例を挙げておく．

例 (i) 鉛筆をてのひらに乗せる．鉛筆のとがった先を指先に向け，け

ずっていない尻を手首の方におく．これで ↑ の状態ができた．腕を前方に差し出し，てのひらを水平に保ったまま，水平面内でぐるっと１回転させる．腕がねじれて苦しいが真理探究のためと思ってがまんしよう．明らかにこれでは元の状態に戻っていない．この状態からさらに水平面内で**同じ向きに**てのひらをもう１回転させる．それにはてのひらを自分の頭上で頭の後ろをぐるっと回してくれればよい．結果はどうなるか．最初とまったく同じ ↑ の状態が得られるはずである．

例(ii)　上の例は何かだまされたような気持ちになるかもしれないので別の例を挙げる．野原に出て，しっかり根をはった雑草を１本見つける．これで ↑ の状態である．草の先端をもってこれを鉛直面内で１回転させる．茎がねじれた状態となり，元には戻っていない．ここでさらに同じ向きにもう１回転させる．ここから少しこつがいるが，つまんでいる草の先端の向きを変えずに根元の茎のよじれの裏側を回ってもち上げると元の状態に戻る．草の代りにテープの一端をピンで机に固定してやって見るとよい（図3.3(a)）．

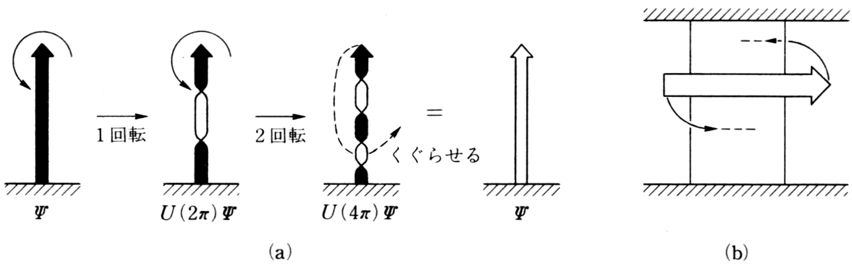


図3.3　スピン 1/2 粒子の 4π 回転

例(iii)　同じことを図3.3 (b) のような装置を作ってやってみると確かめることができる．この場合は矢印を水平面内で２回，回転させる[3]．いうまでもないが，机の上に矢印を置いてくるくる回してもだめである．しっかり大地に根を張った，こちらがしっぽだとはっきりいえるようなものでなければ「頭」と「しっぽ」

は単なる言葉にすぎない．なお，いずれの例も図を見ているだけでは納得できないかもしれない．実際に自分で作って「素粒子実験」をやってみるのが一番よい．

$\sigma_i/2\,(i=1,2,3)$ は通常の軌道角運動量とまったく同じ交換関係を満足し，したがって“角運動量”が 1/2 の粒子の記述に用いられる，という予想がつく．実際にクォークやレプトンがスピン 1/2 の場によって記述され，軌道角運動量以外にたしかに角運動量 1/2 をもつ粒子であることは次章で示される．

集合 $A=\{a_i\}$ において A の任意の二つの元 a_1，a_2 に対して「積」$a_1 * a_2$ が定義され，任意の二つの元の積が A に属し，$a_1 * (a_2 * a_3)=(a_1 * a_2) * a_3$ が成り立つとする．さらに，単位元 1 ($1 * a=a * 1=a$) および逆元 a^{-1}($a^{-1} * a=a * a^{-1}=1$) が A に含まれるとき，集合 A を**群**とよぶ．積は一般に交換するとは限らない ($a * b \neq b * a$)．積が交換するときこれを**アーベル群**とよぶ．その表現は 1×1 行列で書ける．積が交換しない場合を**非アーベル群**とよぶ．

例えば xy 平面内の角度 θ の座標回転は z 軸のまわりの回転と同じことであるから，演算は $U(\theta)=e^{i\theta}$ と書くことができる．このとき

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \text{積}\quad &&: U(\theta_1)\,U(\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)} = U(\theta_1+\theta_2)\\
&(2)\quad \text{単位元} &&: U(0) = e^{i0} = 1 \qquad\qquad (3.69)\\
&(3)\quad \text{逆元}\quad &&: U(\theta)\,U(-\theta) = e^{i(\theta-\theta)} = 1,\\
& && \text{すなわち}\quad U^{-1}(\theta) = U(-\theta)
\end{aligned}
$$

であるから $\{U(\theta)\}$ は群となる．明らかに $U(\theta_1)\,U(\theta_2)=U(\theta_2)\,U(\theta_1)$ であるからこれはアーベル群である．群の元 $e^{i\theta}$ はユニタリ (Unitary) だから**ユニタリ群**とよび，これを U(1) と表す．一般に θ のように連続なパラメータで記述される（微分可能な）群を**リー群**とよぶが，U(1) は最も簡単なリー群の例である．

一方，平面内の回転は 2 行 2 列の直交 (orthogonal) 行列

$$R_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

で表すこともできる．$\{R_2(\theta)\}$ が群をなすことは容易に確かめられる．

問題　$\{R_2(\theta)\}$ が群をなすことを示せ．

式 (3.70) の行列式の値は$+1$ であるが，これを特殊 (special) という．したがってこの群を 2 次元の**特殊直交群** (Special Orthogonal group) とよび，記号 SO(2) で表す．明らかに U(1)＝SO(2) である．

一般に，$n\times n$ の直交行列で行列式の値が$+1$ の行列表現をもつ群を SO(n)と書く．行列要素の数は n^2 個ある．行列 O の転置行列を O^t と書くと，直交行列 $O^tO=1$ の要求は，対角要素が 1 となる条件が n 個，非対角要素がゼロとなる条件が $n(n-1)/2$ 個あるから，SO(n) を決める独立なパラメータの数 N は

$$N = n^2 - n - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) \tag{3.71}$$

である．特に 2 次元回転の場合は $n=2$ とおいて $N=1$．これが与えられた平面内の回転角に対応する．3 次元回転の場合は $n=3$ とおいて $N=3$ となるが，例えばこれを 3 次元回転のオイラー角 α，β，γ にとることができる．

一方，$n\times n$ のユニタリ行列で行列式の値が$+1$ となる表現をもつ群をSU(n) と書く．$n\times n$ のユニタリ行列 U に対して独立なパラメータの数は，行列要素について $2n^2$ (複素数だから 2 倍となる)，$U^\dagger U=1$ の要求は対角要素について n 個，非対角要素について $2\times n(n-1)/2$ 個，行列式が 1 という条件が 1 個で結局

$$N = 2n^2 - n - 2\times\frac{1}{2}n(n-1) - 1 = n^2 - 1 \tag{3.72}$$

である．

一般に変換のパラメータを θ_j $(j=1, \cdots\cdots, n^2-1)$ で表すと SU(n) の元は

$$U = \exp\left(-i\sum_{j=1}^{n^2-1}\theta_j H_j\right) \tag{3.73}$$

と書くことができる．H_j を群の**生成元**とよぶ．SU(n) の生成元は n^2-1 個ある．U がユニタリだから H はエルミートである．さらに $\det e^{iH}=e^{i\mathrm{Tr}H}$ を用いると，$\det U=1$ は $\mathrm{Tr}H=0$ に対応する（Tr（トレース）は行列の対角要素の和を意味する）．

特に $n=2$ とおくと SU(2) の元は $\exp\left(-i\sum_{j=1}^{3}\theta_j H_j\right)$ となるが，$H_j (j=1,2,3)$ として，トレースがゼロの 2 行 2 列の行列であるパウリのスピン行列（式(3.57)）に選ぶことができて

$$\mathrm{SU}(2):\ \{e^{-i\theta_j\cdot\sigma_j/2}\} \tag{3.74}$$

となる．これが式 (3.65) である．$H_j=\sigma_j/2$ は式(3.58) の代数を満足する．一般にリー群の生成元の満たす代数を**リー代数**とぶ．$\theta_j (j=1,2,3)$ は 3 次元空間における回転角と見なせるから

$$\mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{SO}(3) \tag{3.75}$$

である．記号 $\simeq$ はこの二つが群として局所的に等しいことを表す．大域的には式 (3.67) に示したように SU(2) は 3 次元回転群と等しくはない．SO(3) では当然 $R_3(2\pi)=1$ である．

3.6.2 アイソスピン

原子核は陽子 (p) と中性子 (n) からなる．これらの間には π 中間子を媒介とする強い相互作用が働く．これを**核力**とよぶ．核力の特徴の一つとして，それが陽子か中性子かによらないことがある．すなわち p と p，p と n，n と n の間の力が等しい．これを核力の**荷電独立性**とよぶ，さらに，陽子と中性子の質量差は非常に小さい．

$$m_p = 938.3\,[\mathrm{MeV}], \qquad m_n = 939.6\,[\mathrm{MeV}] \tag{3.76}$$

この微小差を電磁相互作用によるものと見なすと，核力に限れば質量は等しいとしてよい．この観点に立つと，陽子と中性子

という二つのものがあるのではなく，**核子** (nucleon) という一つのものがあって，その“姿”によって陽子とか中性子とかよぶだけのことであると解釈できる．ちょうど一人の人間を前から見たか，後ろから見たかの違いと同様である．この前か後ろか，上か下かという概念を数学的に定式化しなければならない．

実空間とは独立に**アイソ空間**を導入する．$\boldsymbol{I}=(I_1, I_2, I_3)$ のこの空間で核子が I_3 の正方向を向くとき陽子，負方向を向くとき中性子と約束する (図 3.4)．このような実空間に関係のない抽象的な空間を素粒子の**内部空間**とよぶ．核子の荷電独立性は，このアイソ空間で核子を表すベクトルがどちらを向いていても観測される現象が同じである，すなわち 3 次元回転対称性をもつ，と言い換えることができる．このような対称性を時空の対称性と区別して**内部対称性**とよぶ．

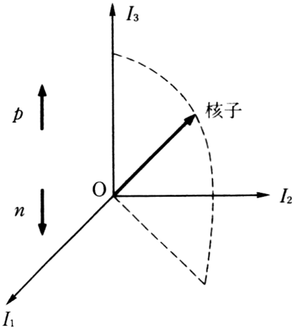


図 3.4　アイソ空間と核子

前節で導入したスピンにならって，核子が**アイソスピン** $I=1/2$ をもち，$I_3=+1/2$ の固有状態が陽子，$I_3=-1/2$ の固有状態が中性子であり，核子は核力に関して回転対称性をもつ，ということができる．

$$
\begin{aligned}
&\qquad\quad I \qquad I_3 \\
|p\rangle &= \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle \\
|n\rangle &= \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

パウリのスピン行列 $\boldsymbol{\sigma}/2$（式 (3.57)）にならって，アイソ空間における回転の生成元 $\boldsymbol{\tau}/2$ を導入する．

$$
\begin{aligned}
&\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k
\end{aligned}
\tag{3.78}
$$

一般に核子 N の状態を

$$
N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{3.79}
$$

で表すと陽子および中性子の固有状態は

$$
|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.80}
$$

と書ける．実際，

$$
\begin{aligned}
I_3|p\rangle &= \frac{1}{2}\tau_3|p\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}|p\rangle \\
I_3|n\rangle &= \frac{1}{2}\tau_3|n\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}|n\rangle
\end{aligned}
\tag{3.81}
$$

である．また，上昇・下降演算子 $\tau_\pm$ を導入して

$$
\begin{aligned}
&\tau_\pm = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2) \\
&\tau_+|n\rangle = |p\rangle, \qquad \tau_-|p\rangle = |n\rangle
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

となる．式 (3.79) のように核子を 2 行 1 列の行列で表したとき，核子は**アイソ 2 重項**を作るという．陽子電荷を単位として核子の電荷 Q が

$$
Q = I_3 + \frac{Y}{2}, \qquad Y = 1 \tag{3.83}
$$

と書けることを注意しておく．

アイソ空間で核子を表す"ベクトル"と上に述べたが，実はアイソ2重項はベクトルではない．この2重項とアイソスピン $\boldsymbol{\tau}/2$ から

$$N^\dagger \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} N \tag{3.84}$$

を作ると，これがアイソベクトルとなる．

これは次のように示すことができる[4]．

$$N = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

において

$$a = e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad b = e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}$$

とおいても一般性を失わない（N は規格化されており $|a|^2+|b|^2=1$ とする）．これから $N^\dagger \tau_1 N$ を作ると

$$N^\dagger \tau_1 N = (a^\dagger, b^\dagger)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^\dagger b + a b^\dagger$$

$$= (e^{i\phi}+e^{-i\phi})\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \sin\theta\cos\phi$$

同様にして

$$N^\dagger \tau_2 N = \sin\theta\sin\phi, \qquad N^\dagger \tau_3 N = \cos\phi$$

したがって $N^\dagger \boldsymbol{\tau} N$ は (θ, ϕ) 方向を向いたベクトルである．

一方，核力を媒介する π 中間子は荷電状態に応じて π^+, π^-, π^0 の3種類存在するが，これをアイソベクトル

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$
$$\pi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\pi_1 \pm i\pi_2), \qquad \pi^0 = \pi_3 \tag{3.85}$$

で表す．核力の荷電独立は核子 N と π 中間子の相互作用がアイソ空間で回転不変であるということができるから，式(3.84)と式(3.85)の内積をとってスカラー量を作り，

$$\mathscr{L}_{\rm int} = g\, N^\dagger \boldsymbol{\tau}\, N\cdot\boldsymbol{\pi} \tag{3.86}$$

が核力を記述する相互作用ラグランジアンであると結論される．g は強い相互作用の結合定数である（図3.5）．式(3.86)の

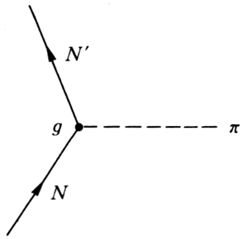


図 3.5　核子と π 中間子の相互作用

ような相互作用の形を**湯川相互作用**とよぶ．

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

とおき，式(3.78)と式(3.85)を用いて式(3.86)を展開すると

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g(p^\dagger p\pi^0 - \sqrt{2}\,p^\dagger n\pi^+ - \sqrt{2}\,n^\dagger p\pi^- - n^\dagger n\pi^0) \quad (3.87)$$

となる．式 (3.87) からただちに結合定数の関係式 $g_{pp\pi^0} = \sqrt{2}\,g_{pn\pi^+}$ 等が得られる．すなわち，対称性の議論から実際の粒子反応に対する関係式を得ることができる．

3.6.3 弱い相互作用

中性子の β 崩壊 $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ （$\bar{\nu}_e$ は電子ニュートリノの反粒子，くわしくは後述）を考える．中性子および陽子をクォークで表すと $n=(udd)$，$p=(uud)$ であるから，β 崩壊は n の中の一つの d が u に変って，p になったと見なせる．したがってクォークとレプトンのレベルで表して

$$d \longrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.88)$$

と書くことができる．これは弱い相互作用であるからその媒介粒子 W_μ （ベクトルのゲージ粒子）を用いて式(3.88)を図 3.6 のように表すことができる．

ここで大きな仮定が入る．ちょうど陽子と中性子を核子の 2 重項と見なしたように，u と d をまとめてクォーク q の 2 重項と見なし，かつ，電子 e とそれに対応するニュートリノ ν_e をレプトン l の 2 重項と見なす．

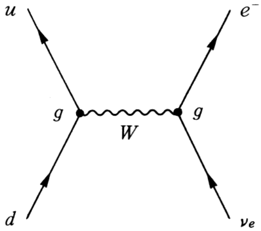


図 3.6　β 崩壊と W ボソン

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \qquad l = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

陽子，中性子の場合と異なり，u と d，あるいは ν_e と e は質量が異なるが，ここではそれを無視する（というよりも質量はすべてゼロにとる．なぜ質量をゼロにとるかは 6.1 節で述べる．実際に観測される質量をどうやって導入するかは 7 章で議論する）．

陽子・中性子の場合と同様，2 重項の「上」成分，「下」成分の上下とは何かを決めるには再び内部空間を導入しなければならない．これを**弱いアイソ空間**とよぶ．以後この「弱い」をくり返すのはわずらわしいので省略し，単にアイソ空間，アイソスピン等の言葉を用いるが，陽子・中性子の荷電空間とは異なることを忘れてはならない．式 (3.78) のアイソスピン行列 $\boldsymbol{\tau}$ を導入して式 (3.84) にならってアイソベクトル $\psi^\dagger \boldsymbol{\tau} \psi$ ($\psi = q$ または l) を作る（正確には次章で導入する $\bar{\psi}$ を用いて $\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\psi$ であるが，ここではどちらでも本質に関係しない．この章では内部空間における変換性のみを議論する）．

一方，媒介粒子 W もそれに応じてアイソベクトル $\boldsymbol{W} = (W^1, W^2, W^3)$ と見なし，式 (3.86) にならってアイソ空間における回転対称なラグランジアン

$$\mathcal{L}_W = g\psi^\dagger \boldsymbol{\tau} \psi \cdot \boldsymbol{W} \tag{3.90}$$

が弱い相互作用を記述するラグランジアンであるとする（g は弱い相互作用の結合定数）．くり返すが“対称性が相互作用を決定する”という思想が素粒子論の憲法であるという立場をとっ

ている．実際，式 (3.90) の相互作用が出ることはこれから述べるゲージ不変性と，次章で導入するディラック・ラグランジアンから示すことができる．ここではゲージ不変性について調べよう．

電磁場にならって共変微分 D_μ を導入する．

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu, \qquad W_\mu \equiv \frac{1}{2}\tau^i W_\mu{}^i \tag{3.91}$$

ここでゲージ場 $W_\mu{}^i$ はローレンツ・ベクトル ($\mu=0, 1, 2, 3$)，かつアイソベクトル ($i=1, 2, 3$) である．

波動関数 $\psi(=q$ または $l)$ に対する局所ゲージ変換

$$\begin{aligned}&\psi \longrightarrow \psi' = U\psi\\ &U = e^{-ig\chi(x)}, \qquad \chi(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\chi}(x)\end{aligned} \tag{3.92}$$

の下で，W_μ は式 (3.48) に従って微小変換 $\chi(x)$ に対して

$$\begin{aligned}W_\mu \longrightarrow W_\mu' &= UW_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}\\ &= W_\mu - \partial_\mu\chi - ig[\chi, W_\mu]\end{aligned} \tag{3.93}$$

と変換される．式 (3.78) を用いて式 (3.93) を成分で書くと

$$W_\mu{}^{i\prime} = W_\mu{}^i - \partial_\mu\chi^i + g\varepsilon_{ijk}\chi_j W_\mu{}^k \tag{3.94}$$

となる．

次にこの W_μ に対する場の強さを求める．そのためにもう一度電磁気学に戻ろう．電磁場に対する場の強さは式 (2.33) に与えてある．また，電磁場に対する共変微分は式 (3.36) である．このとき，任意の波動関数 ψ に対して

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = -ieF_{\mu\nu}\psi \tag{3.95}$$

が成り立つ．さらに D_μ の最初の定義 (式(3.35)) から，ゲージ変換

$$\psi(x) \longrightarrow e^{-ie\Lambda(x)}\psi(x) \tag{3.96}$$

の下で

$$([D_\mu, D_\nu]\psi)' = e^{-ie\Lambda(x)}[D, D_\nu]\psi \tag{3.97}$$

とならねばならない．したがって

$$F_{\mu\nu}' = e^{-ie\Lambda(x)}F_{\mu\nu}e^{ie\Lambda(x)} \tag{3.98}$$

が変換後の場の強さ $F_{\mu\nu}'$ を与える．電磁場の場合アーベリアンであるから，式 (3.98) の右辺は $F_{\mu\nu}$ に等しくなり，これは $F_{\mu\nu}$ がゲージ不変量であることを意味する．

この方法を W_μ に対して応用しよう．すなわち場の強さ $G_{\mu\nu}$ を式 (3.95) にならって式 (3.91) の D_μ を用いた

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = -igG_{\mu\nu}\psi \tag{3.99}$$

によって定義する．具体的に書くと

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig[W_\mu, W_\nu] \tag{3.100}$$

あるいは成分で表すと

$$G_{\mu\nu}{}^i = \partial_\mu W_\nu{}^i - \partial_\nu W_\mu{}^i + g\varepsilon_{ijk} W_\mu{}^j W_\nu{}^k \tag{3.101}$$

である．また，$G_{\mu\nu}$ のゲージ変換は式 (3.97) にならって

$$([D_\mu, D_\nu]\psi)' = e^{-ig\chi(x)}[D_\mu, D_\nu]\psi \tag{3.102}$$

あるいは

$$G_{\mu\nu}' = e^{-ig\chi(x)} G_{\mu\nu} e^{ig\chi(x)} \tag{3.103}$$

であるが，いまは $[\chi(x), G_{\mu\nu}] \neq 0$ であるから式 (3.103) の右辺は $G_{\mu\nu}$ とならず，したがって場の強さ $G_{\mu\nu}$ は電磁場と異なり，ゲージ不変量とはならない．しかし，

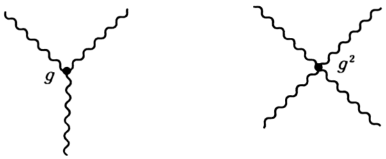
$$\mathscr{L}_W = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) \tag{3.104}$$

を考えるとこれはゲージ不変である．実際，式 (3.103) を用いて ($U = e^{-ig\chi(x)}$ とおくと)

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(G_{\mu\nu}'G^{\mu\nu\prime}) &= \mathrm{Tr}(UG_{\mu\nu}U^{-1}UG^{\mu\nu}U^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(UG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}U^{-1}) = \mathrm{Tr}(U^{-1}UG_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) \\ &= \mathrm{Tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})\end{aligned} \tag{3.105}$$

である．ここで $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ の性質を用いた．式 (3.104) はしたがって，電磁場のラグランジアン $-(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ の代りにゲージ場 W_μ に対するゲージ不変なラグランジアンを与えることがわかる．

式 (3.101) からわかるように $G_{\mu\nu}$ には場 W_μ の 1 次と 2 次の項が含まれている．したがって式 (3.104) の $\mathscr{L}_W$ には運動エネルギー項のほかに W_μ の 3 次と 4 次の項がある (図 3.7)．こ



(a) gW^3 (b) g^2W^4 **図 3.7** W ボソンの自己相互作用

れは場 W_μ 自体が自分自身の source となって自分を作り出すことを意味する．このような非線形現象は非アーベリアン・ゲージ場の特徴である．特に量子色力学ではこれが重要な役割を果すことを 9 章で見る．

電磁場の場合，場の source は電荷であるが，その媒介粒子であるフォトンそのものは電荷をもたない．したがってフォトンは電磁場の source とはなり得ず，フォトンがフォトンを出してフォトンとなるような非線形項は現れない．

ゲージ場についてはここでひとまずおくことにし，次章では物質場，すなわちクォークとレプトンについて考察する．

参考文献

1) Halzen, F. and Martin, A. D.: Quarks & Leptons (John Wiley & Sons, 1984)；小林澈郎，広瀬立成 訳：クォークとレプトン（培風館，1986 年）．
2) Feynman, R. P.: Theory of Fundamental Processes (W. A. Benjamin/Cummings, 1962)；大場一郎 訳：ファインマン・レクチャー　素粒子物理学（丸善，1992 年）．
3) Huang, K.: Quarks, Leptons & Gauge Fields (World Scientific, 1982), p. 66.
4) Kane, G.: Modern Elementay Particle Physics (Addison-Wesley, 1987).

4　ディラック方程式

4.1　ディラック方程式の導出[1)]

質量 m の自由スカラー場 ϕ に対しては式（3.6）のクライン-ゴルドン方程式が成り立った．これはフーリエ変換で on-shell 条件(式(3.7))を与える．同様に自由電磁場に対しても式(2.10)で $j^\mu=0$ とおいてマクスウェル方程式

$$\square A^\mu-\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)=0 \tag{4.1}$$

が成り立つが，式（2.25）のゲージ不変性を用い，$\partial_\nu A^\nu=0$ のゲージ（これを**ローレンツ・ゲージ**とよぶ）で考えると

$$\square A^\mu=0 \tag{4.2}$$

となる．フーリエ変換でこれは電磁場の4元運動量 p^μ に対して $p^2=p^\mu p_\mu=0$ を与え，フォトンの質量がゼロであることに対応する．したがって一般に質量 m の任意の自由場 ψ に対してクライン-ゴルドン方程式

$$(\square+m^2)\psi=0 \tag{4.3}$$

が成り立たねばならない．$(\square+m^2)$ がローレンツ不変なこと，すなわち式（4.3）が座標系によらず同じ形をもつことに注意．

クォークおよびレプトンの波動関数を $\psi(x)$ と書くと，この ψ に対しても当然，式 (4.3) が成り立つ．式 (4.3) は2階微分方程式である．基本方程式として1階微分のみを含み，かつク

ライン-ゴルドン方程式と同様に相対論的に共変なものを作ることができないか．これが**ディラック方程式**である．ここで相対論的に共変とはローレンツ変換によって方程式の形が変らないことを意味する．

ψ に対する1階微分方程式として係数 $\boldsymbol{\alpha}$, β を用い，

$$H\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\psi = \left(-i\alpha_i\frac{\partial}{\partial x^i}+\beta m\right)\psi \tag{4.4}$$

をとろう．式(4.4)の両辺に左から再び $i\partial/\partial t=-i\alpha_i\partial_i+\beta m$ を掛けると

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (-i\alpha_i\partial_i+\beta m)(-i\alpha_j\partial_j+\beta m)\psi = \left[-\frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)\partial_i\partial_j - im(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)\partial_i + \beta^2m^2\right]\psi \tag{4.5}$$

となる．ここで $\partial_i\partial_j=\partial_j\partial_i$ を用いて第1項が i と j に対して対称となるように書き換えを行っている．式(4.5)は式(4.3)のクライン-ゴルドン方程式に一致しなければならないから α_i と β に対して次の条件が課せられる．

$$\alpha_i{}^2 = \beta^2 = 1 \tag{4.6}$$

$$\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i = 0 \qquad (i\neq j) \tag{4.7}$$

$$\alpha_i\beta+\beta\alpha_i = 0 \tag{4.8}$$

式(4.6)～(4.8)を満足する α_i と β は具体的にはどのような行列表現をとるかを見る．まず，次のことに注意する．

(i)　α_i と β の固有値は±1（式(4.6)より）．

(ii)　$\mathrm{Tr}\,\alpha_i=\mathrm{Tr}\,\beta=0$．実際，

$$\mathrm{Tr}\,\alpha_i \underset{\text{式}(4.6)}{=} \mathrm{Tr}\,(\alpha_i\beta^2) \underset{\mathrm{Tr}\text{の性質}}{=} \mathrm{Tr}\,(\beta\alpha_i\beta) \underset{\text{式}(4.8)}{=} -\mathrm{Tr}\,(\alpha_i\beta^2) \underset{\text{式}(4.6)}{=} -\mathrm{Tr}\alpha_i = 0$$

同様に

$$\mathrm{Tr}\,\beta = \mathrm{Tr}(\beta\alpha_i^2) = \mathrm{Tr}(\alpha_i\beta\alpha_i) = -\mathrm{Tr}(\beta\alpha_i^2)$$
$$= -\mathrm{Tr}\beta = 0$$

(iii) α_i と β はエルミート.

これは式 (4.4) においてハミルトニアン H がエルミートであることから明らか.

性質 (i) と (ii) から $n\times n$ の行列 α_i と β に対して，n が偶数であることがいえる．最も簡単なのは $n=2$ であるが，2 行 2 列の Trace=0 の行列として互いに独立なものは式 (3.57) のパウリ行列 $\sigma_i(i=1,2,3)$ しかなく，これでは数が足りない．したがって条件を満足する最も簡単なものは $n=4$ である．以下，これを採用しよう．エルミートで Trace=0 の 4 行 4 列の行列として，いろいろな形が可能であるが，**ディラック表現**（または**標準表現**）として次のものをとる．

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

ここで σ_i は 2 行 2 列のパウリ行列（式(3.57)）であり，1 は 2 行 2 列の単位行列を表す．さらに

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i)\ ; \qquad \gamma^0 = \beta, \qquad \gamma^i = \beta\alpha_i \tag{4.10}$$

によって新たに 4 行 4 列の行列 $\gamma^\mu(\mu=0,1,2,3)$ を導入する．これを**ディラックの γ 行列**と名づける．

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

γ^μ を用いて式(4.6)～(4.8)は

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

と，一つの式で書くことができる．

問題 式(4.12)を示せ．

式 (4.4) において，左から β を掛け，式 (4.10) を用いると，結局，波動方程式は

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi(x)=0 \tag{4.13}$$

という美しい形をとる．ここで ψ は 4 行 1 列の量である．これを**ディラック・スピノール**とよぶ，式 (4.13) が有名な**ディラック方程式**である．“物理法則は美しくなければならない”といったのはディラックその人であるが，式 (4.13) を見て“美しい”と感じることができるかどうかが科学者としてのセンスをもっているか否かの試金石となる．ただし，その美しさが本当にわかるようになるのは，当然，この式を使いこなし，その深い意味を読み取れるようになってからのことである．

ψ のエルミート共役 $\psi^{\dagger}$ は 1 行 4 列であるが，これに右から γ^0 を掛けたものを $\bar{\psi}$ と書く．$\bar{\psi}\equiv\psi^{\dagger}\gamma^0$．式 (4.13) のエルミート共役をとり，式 (4.12) の性質を用いると，$\bar{\psi}$ に対する方程式が得られ，

$$\bar{\psi}(x)(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}+m)=0 \tag{4.14}$$

となる．ここで $\overleftarrow{\partial}_{\mu}$ は微分が左側に作用することを意味する．

問題　式 (4.14) を示せ．式 (4.12) より $(\gamma^0)^{\dagger}=\gamma^0, (\gamma^i)^{\dagger}=-\gamma^i$，したがって $\gamma^0(\gamma^{\mu})^{\dagger}\gamma^0=\gamma^{\mu}$ に注意．

ディラック場に対する自由ラグランジアンは

$$\mathcal{L}(\psi,\bar{\psi})=\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi \tag{4.15}$$

となる．実際，これからオイラー方程式を作るとディラック方程式 (4.13)，(4.14) が得られることは明らかであろう．式 (4.15) がたしかにスカラーであることは4.4節の終りに示す．

問題　式 (4.15) から $\bar{\psi}$ に対する方程式 (4.14) を導け．

ヒント　作用は $\mathcal{L}$ の積分で書けるから $\mathcal{L}\to\mathcal{L}+\partial_{\mu}\Lambda$ とおいてもオイラー方程式は変らないことに注意．

4.2　ディラック方程式の共変性

一般に座標変換

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu\prime} = a^\mu{}_\nu x^\nu \qquad (\text{以下，} x' = ax \text{ と書く}) \tag{4.16}$$

を考える．ここで $a^\mu{}_\nu$ は x によらない定数とする．変換 (4.16) に対して波動関数 $\psi(x)$ の変換を 4×4 行列の $S(a)$ を用いて

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x) \tag{4.17}$$

と書くと，ディラック方程式 (4.13) は $\partial_\mu = a^\nu{}_\mu \partial_\nu'$ を用いて

$$(i\gamma^\mu a^\nu{}_\mu \partial_\nu' - m) S^{-1}(a)\psi'(x') = 0 \tag{4.18}$$

と書けるが，この式に左から $S(a)$ を掛けて

$$[iS(a)\gamma^\mu S^{-1}(a) a^\nu{}_\mu \partial_\nu' - m]\psi'(x') = 0 \tag{4.19}$$

となる．式 (4.19) が新しい系でのディラック方程式である．方程式が共変，すなわち座標変換によってその形を変えないことを要求すると，新しい座標系でのディラック方程式は

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu' - m)\psi'(x') = 0 \tag{4.20}$$

でなければならない．式 (4.19) と式 (4.20) を比較して結局，ディラック方程式が座標系によらず同じ形をもつための条件は

$$S^{-1}(a)\gamma^\nu S(a) = a^\nu{}_\mu \gamma^\mu \tag{4.21}$$

を満足する S が存在することと等しい．

ここで式 (4.16) を微小変換

$$a^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \Delta\omega^\mu{}_\nu, \qquad \Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu} \tag{4.22}$$

に限ってみよう．具体的に x 軸方向に速度 $\Delta\beta$ で動く系への微小ローレンツ変換に対しては

$$\begin{cases} x' = x - \Delta\beta\, t \\ t' = t - \Delta\beta\, x \end{cases}$$

$$\left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\Delta\beta)^2}} \fallingdotseq 1\right) \tag{4.23}$$

より

$$\Delta\omega^{01} = -\Delta\omega^{10} = \Delta\beta \tag{4.24}$$

である．また，z 軸のまわりの角度 $\Delta\theta$ による微小回転に対し

ては

$$\begin{cases} x' = x + \Delta\theta\, y \\ y' = y - \Delta\theta\, x \end{cases} \tag{4.25}$$

より

$$\Delta\omega^{21} = -\Delta\omega^{12} = \Delta\theta \tag{4.26}$$

である．

微小変換（4.22）の下で S を

$$S = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\Delta\omega^{\mu\nu}, \qquad \sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu} \tag{4.27}$$

とおく．このとき式（4.21）は

$$\Delta\omega^{\nu}{}_{\mu}\gamma^{\mu} = \frac{i}{4}[\sigma_{\rho\sigma}, \gamma^{\nu}]\Delta\omega^{\rho\sigma} \tag{4.28}$$

と書ける．式（4.28）を満足する $\sigma_{\rho\sigma}$ として

$$\sigma_{\rho\sigma} = \frac{i}{2}[\gamma_{\rho}, \gamma_{\sigma}] \tag{4.29}$$

をとればよいことが直接確かめられる．

問題　式(4.12)をくり返し用いることによって式(4.29)が式(4.28)を満足することを確かめよ．$\gamma_{\rho} = g_{\rho\alpha}\gamma^{\alpha}$, $g_{\rho\alpha}g^{\alpha\mu} = \delta_{\rho}{}^{\mu}$ に注意．

特に微小ローレンツ変換（4.24）に対しては

$$S = 1 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1\Delta\beta, \qquad \bar{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

また，微小回転（4.26）に対しては

$$S = 1 + \frac{i}{2}\tilde{\sigma}_3\Delta\theta, \qquad \tilde{\sigma}_3 \equiv \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

となる．

問題　式(4.30)，(4.31) を示せ．

微小変換が得られたから，これをくり返すことによって有限な座標変換に対する S を求めることができる．

ローレンツ変換に対しては式(4.23)より $\Delta\beta=\alpha/N$ とおいて

$$
\begin{aligned}
x^{\mu\prime} &= \left[\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{N}\varepsilon\right)^N\right]^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \\
&= (e^{+\alpha\varepsilon})^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = (\cosh\alpha+\varepsilon\sinh\alpha)^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\left(\mu,\nu=0,1;\qquad \varepsilon=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad \varepsilon^2=1\right) \tag{4.32}
$$

すなわち

$$
\begin{pmatrix}t'\\ x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\alpha & -\sinh\alpha & 0 & 0\\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix} \tag{4.33}
$$

これは

$$
\cosh\alpha=\gamma,\qquad \sinh\alpha=\beta\gamma,\qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.34}
$$

とおいて，たしかにローレンツ変換である．このとき $S(\alpha)$ は式（4.30）より

$$
S(\alpha)=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\bar{\sigma}_1\frac{\alpha}{N}\right)^N=e^{-\alpha\bar{\sigma}_1/2} \tag{4.35}
$$

したがって

$$
\psi'(x')=e^{-\alpha\bar{\sigma}_1/2}\psi(x) \tag{4.36}
$$

が得られる．この式の具体的応用は次節に示す．

まったく同様にして回転に対しても $\Delta\theta=\theta/N$ とおいて

$$
\begin{aligned}
x^{\mu\prime} &= \left[\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{\theta}{N}\eta\right)^N\right]^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \\
&= (e^{\theta\eta})^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = (\cos\theta+\eta\sin\theta)^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\left(\mu,\nu=1,2;\qquad \eta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad \eta^2=-1\right) \tag{4.37}
$$

すなわち

$$
\begin{cases} x'=x\cos\theta+y\sin\theta \\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases} \tag{4.38}
$$

となり，これはたしかに z 軸のまわりの角度 θ による回転である．このとき $S(\theta)$ は式（4.31）より

$$S(\theta) = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{i}{2}\tilde{\sigma}_3\frac{\theta}{N}\right)^N = e^{i\tilde{\theta}_3/2} \tag{4.39}$$

一般に 3 次元回転 $\theta^i(i=1,2,3)$ の下で $\psi(x)$ は式 (4.39) を一般化して

$$\psi'(x') = e^{i\theta^i\tilde{\sigma}_i/2}\psi(x), \qquad \tilde{\sigma}_i = \begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{pmatrix} \tag{4.40}$$

と変換される.

式 (4.40) は式 (3.65) に与えた SU(2) の回転とまったく同じ形をしている. 回転の生成元＝角運動量演算子はこの場合 $\boldsymbol{\sigma}/2$ であり, $\psi(x)$ がスピン 1/2 の角運動量をもつことが示された. このことは, さらに次節に述べるディラック方程式の解を調べることによって, より明らかになる.

4.3 ディラック方程式の解

ディラック方程式 (4.13) の解の具体的な形を求めよう. 特に静止系では式 (4.13) は

$$i\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} = m\psi \tag{4.41}$$

式 (4.11) の γ^0 を用いてこの解は

$$\begin{aligned}\psi^1 &= e^{-imt}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, &\quad \psi^2 &= e^{-imt}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\\ \psi^3 &= e^{+imt}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, &\quad \psi^4 &= e^{+imt}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.42}$$

と書くことができる.

ここで式 (4.39) を式 (4.42) の ψ^1 に作用させてみよう. $\tilde{s}_3 = \tilde{\sigma}_3/2$ とおいて

$$\tilde{s}_3\psi^1 = +\frac{1}{2}\psi^1, \qquad S(\theta)\psi^1 = e^{i\theta/2}\psi^1 \tag{4.43}$$

が得られる．したがって静止系（軌道角運動量はゼロ）において，ψ^1 は角運動量 1/2 をもち，その z 成分が +1/2 の固有状態となっている．この角運動量を**スピン**とよぶ．静止系における角運動量を「電子が自転している」という言葉で表すことがあるが，電子に有限の大きさと構造をもたせているわけではないのでこのような言い方はあまりよくない．「電子はスピン 1/2 の粒子である」という文章以上のことはいえず，またそれで十分としなければならない．

3.6.1 項で述べたことのくり返しとなるが，式 (4.43) より

$$S(2\pi)\psi^1 = -\psi^1, \qquad S(4\pi)\psi^1 = \psi^1 \tag{4.44}$$

となる．電子は**2回**ぐるっと回って，初めて元の状態に戻るのである．

まったく同様にして，ψ^1 と ψ^3 が $s_3 = +1/2$，ψ^2 と ψ^4 が $s_3 = -1/2$ の固有状態となっていることは明らかであろう．

静止系でなく，一般に運動量 $\boldsymbol{p}$ をもった場合の解は次のようにして求めることができる．$\psi(x)$ を平面波の重ね合せとして表し，そのフーリエ係数を $u_r(p)$，$v_r(p)$ $(r=1,2)$ で表す．ここで $u_r(p)$，$v_r(p)$ は式 (4.42) の一般化として

$$\psi^r(x) \sim e^{-ip\cdot x}u_r(p), \qquad u_1(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad u_2(0) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\psi^{r+2}(x) \sim e^{+ip\cdot x}v_r(p), \qquad v_1(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_2(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(r = 1, 2) \tag{4.45}$$

である．式 (4.45) において記号～は p について重ね合せることを意味するが，正確な式は後に与える．ディラック方程式 (4.13) に式 (4.45) を代入して $u_r(p)$ と $v_r(p)$ に対する方程式

は

$$\begin{aligned}(\gamma\cdot p-m)\,u_r(p)&=0\\(\gamma\cdot p+m)\,v_r(p)&=0\\\bar{u}_r(p)\,(\gamma\cdot p-m)&=0\\\bar{v}_r(p)\,(\gamma\cdot p+m)&=0\\(r&=1,2)\end{aligned}\tag{4.46}$$

となる．

問題　式(4.46)を導け．

$u_r(p)$ および $v_r(p)$ はそれぞれ静止系での $u_r(0)$ および $v_r(0)$ にローレンツ変換をほどこすことによって得られる．これを**ブースト**とよぶ．止まっている人の背中をぐっと押して走らせるという意味である．

$$\begin{aligned}&u_r(p)=S(\boldsymbol{\alpha})\,u_r(0),\qquad v_r(p)=S(\boldsymbol{\alpha})\,v_r(0)\\&S(\boldsymbol{\alpha})=e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\bar{\boldsymbol{\sigma}}/2},\qquad \bar{\boldsymbol{\sigma}}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.47}$$

ここで $S(\boldsymbol{\alpha})$ は，式 (4.35) の任意の方向へのブーストについての一般化である．$\boldsymbol{\alpha}=\alpha\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$方向へのブースト，$\boldsymbol{n}^2=1$) と書いて $S(\boldsymbol{\alpha})$ は

$$\begin{aligned}S(\boldsymbol{\alpha})&=e^{-\alpha\boldsymbol{n}\cdot\bar{\boldsymbol{\sigma}}/2}\\&=\begin{pmatrix}\cosh\dfrac{\alpha}{2}&-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\dfrac{\alpha}{2}\\-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sinh\dfrac{\alpha}{2}&\cosh\dfrac{\alpha}{2}\end{pmatrix}\\&=\cosh\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}1&-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\tanh\dfrac{\alpha}{2}\\-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\tanh\dfrac{\alpha}{2}&1\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.48}$$

となる．ここで式 (4.34) より，$\tanh\alpha=-\beta$ (例えば $-x$ 軸方向へのローレンツ変換で粒子の運動量は $0\to+p_x$ になる) を用いると，$\boldsymbol{n}\cdot\beta=\boldsymbol{\beta}$ とおいて

$$-\boldsymbol{n}\tanh\frac{\alpha}{2}=\frac{-\boldsymbol{n}\tanh\alpha}{1+\sqrt{1-\tanh^2\alpha}}=\frac{\boldsymbol{\beta}}{1+\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$=\frac{m\boldsymbol{\beta}/\sqrt{1-\beta^2}}{m/\sqrt{1-\beta^2}+m}=\frac{\boldsymbol{p}}{E+m} \tag{4.49}$$

$$\cosh\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha/2}}=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}$$

である．結局最終的に $S(\boldsymbol{\alpha})$ は

$$S(\boldsymbol{\alpha})=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} & 1\end{pmatrix} \tag{4.50}$$

となり，

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}p_3 & p_-\\ p_+ & -p_3\end{pmatrix},\qquad p_\pm=p_1\pm ip_2 \tag{4.51}$$

を代入して式（4.47）は

$$u_1(p)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \dfrac{p_3}{E+m}\\ \dfrac{p_+}{E+m}\end{pmatrix}$$

$$u_2(p)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \dfrac{p_-}{E+m}\\ \dfrac{-p_3}{E+m}\end{pmatrix} \tag{4.52}$$

$$v_1(p)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\dfrac{p_3}{E+m}\\ \dfrac{p_+}{E+m}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$v_2(p)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\dfrac{p_-}{E+m}\\ \dfrac{-p_3}{E+m}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

となる．これがディラック方程式の解である．静止系での $u_r(0)$ と $v_r(0)$ $(r=1,2)$ が4元スピノールの完全系を作ることは明らかである．したがってこれらをブーストして作られた $u_r(p)$ と $v_r(p)$ の p に対する重ね合せで一般の $\psi(x)$ が書ける．

$u_r(p)$ と $v_r(p)$ に対する規格化条件を求めよう．例えば $u_1(p)$ に対して

$$\bar{u}_1(p)\,u_1(p)=\frac{E+m}{2m}\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{p_3}{E+m} & \dfrac{p_-}{E+m}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \dfrac{p_3}{E+m}\\ \dfrac{p_+}{E+m}\end{pmatrix}=1 \tag{4.53}$$

となる．他も同様にして計算できる．まとめると

$$\begin{aligned}\bar{u}_\alpha(p)\,u_\beta(p)&=\delta_{\alpha\beta}\\ \bar{v}_\alpha(p)\,v_\beta(p)&=-\delta_{\alpha\beta}\qquad(\alpha,\beta=1,2)\\ \bar{u}_\alpha(p)\,v_\beta(p)&=0\end{aligned} \tag{4.54}$$

問題　式(4.54)を確かめよ．

ここで後に重要な役割を果す演算子を導入しておく．

$$P_+=\sum_{\alpha=1,2}u_\alpha(p)\,\bar{u}_\alpha(p) \tag{4.55}$$

を定義すると，式(4.54)を用いて

$$P_+{}^2=\sum_{\alpha,\beta}u_\alpha(p)\,\bar{u}_\alpha(p)\,u_\beta(p)\,\bar{u}_\beta(p)=\sum_\alpha u_\alpha(p)\,\bar{u}_\alpha(p)$$

$$= P_+ \tag{4.56}$$

すなわち P_+ は**射影演算子**である（一般に $P^2=P$ を満足する演算子を射影演算子とよぶ．移項すると $P^2-P=P(1-P)=0$，したがって射影演算子の固有値は 0 か 1 である）．式 (4.46) を用いると

$$(\gamma\cdot p-m)P_+ = 0 \tag{4.57}$$

$P_+=a+b\gamma\cdot p$ とおいて式 (4.57) に代入すると $a=mb$，また ${P_+}^2=P_+$ に代入すると $b=m/2$ を得る．したがって

$$P_+ = \sum_{\alpha=1,2} u_\alpha(p)\,\bar{u}_\alpha(p) = \frac{\gamma\cdot p+m}{2m} \tag{4.58}$$

まったく同様にして

$$P_- = -\sum_{\alpha=1,2} v_\alpha(p)\,\bar{v}_\alpha(p) = \frac{-\gamma\cdot p+m}{2m} \tag{4.59}$$

当然のことながら P_+ と P_- は射影演算子の性質

$$P_+P_- = 0, \qquad P_++P_- = 1 \tag{4.60}$$

を満足する．

4.4 ワイル・スピノール

4.4.1 ニュートリノ

ディラックの γ 行列は式 (4.12) の代数を満足する限り，何であってもよい．ディラック方程式 (4.13) は $\psi(x)$ に対するユニタリ変換 $\psi\to\psi'=U\psi$ によって（U は x によらないユニタリ行列）

$$(iU^{-1}\gamma^\mu U\partial_\mu-m)\psi'(x) = 0 \tag{4.61}$$

となるから，新たに $\gamma^{\mu\prime}=U^{-1}\gamma^\mu U$ を γ 行列に選んでも方程式の形は変らない．したがってこの節では γ 行列に対して次の表現を選ぶ．これを**ワイル表現**あるいは**カイラル表現**とよぶ．

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

式 (4.62) が式 (4.12) を満足することは直接確かめられる．

4 成分スピノール ψ の上二つと下二つの成分をそれぞれ ψ_R, ψ_L で表す.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

ψ_R, ψ_L は 2 成分スピノールである. これを**ワイル・スピノール**とよぶ. この表現でディラック方程式 (4.13) は $i\partial_\mu = p_\mu = (E, -\boldsymbol{p})$ とおいて

$$\begin{pmatrix} -m & E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ E-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0 \tag{4.64}$$

すなわち

$$\begin{cases} -m\psi_R + (E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\psi_L = 0 \\ (E-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\psi_R - m\psi_L = 0 \end{cases} \tag{4.65}$$

となる. これからただちに次の結論が得られる.

(1)　$\boldsymbol{p} \leftrightarrow -\boldsymbol{p}$ は $\psi_R \leftrightarrow \psi_L$ に対応する.

(2)　特に $m=0$ とおくと ($E=|\boldsymbol{p}|$ を用い, また $\hat{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ と書いて) ψ_R と ψ_L の方程式が分離して

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\ \psi_L = -\frac{1}{2}\psi_L, \qquad \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\ \psi_R = +\frac{1}{2}\psi_R \tag{4.66}$$

(3)　逆に $m\neq 0$ のとき, ψ_R と ψ_L が一つの方程式に混じり合う.

式 (4.66) に現れた演算子 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}/2=\boldsymbol{s}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$ はスピンの進行方向成分を表し, **ヘリシティ**とよばれる. ψ_L はヘリシティが $-1/2$ の粒子に対応する. これが質量ゼロのニュートリノに対する**ワイル方程式**である. ニュートリノはスピン 1/2 をもち, その進行方向成分が $-1/2$ であり, 決して $+1/2$ のものはない. これをニュートリノは**左巻き**であるという. まったく同様に ψ_R はヘリシティが $+1/2$ の反ニュートリノに対応する. 反ニュートリノは右巻きである (反粒子については 4.5 節で説明する).

現在のところ実験的にニュートリノの質量はゼロとして矛盾はないが, もし微小な質量をもつことがあれば話は変り, 種々の興味深い話題が生じる. これについては 11.4 節で述べる.

4.4.2 パ リ テ ィ

式 (4.62) の γ^μ を組み合せて新たに γ^5 を定義する.

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_5 \equiv \gamma^5$$
$$(\gamma^5)^2 = 1, \qquad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \qquad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \tag{4.67}$$

この γ^5 を用いて次の演算子を導入する.

$$P_{\rm L} = \frac{1-\gamma^5}{2}, \qquad P_{\rm R} = \frac{1+\gamma^5}{2} \tag{4.68}$$

すぐわかるように $P_{\rm L}$, $P_{\rm R}$ は $\phi_{\rm L}$, $\phi_{\rm R}$ に対する射影演算子である.

$$P_{\rm L}{}^2 = P_{\rm L}, \qquad P_{\rm R}{}^2 = P_{\rm R}, \qquad P_{\rm L}P_{\rm R} = 0, \qquad P_{\rm L}+P_{\rm R} = 1$$
$$P_{\rm L}\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_{\rm R} \\ \phi_{\rm L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{\rm L} \end{pmatrix} \tag{4.69}$$
$$P_{\rm R}\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_{\rm R} \\ \phi_{\rm L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{\rm R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

座標変換の特別な場合として**空間反転**

$$x^i \longrightarrow -x^i \quad (i = 1, 2, 3), \qquad x^0 \longrightarrow x^0 \tag{4.70}$$

を定義する. これは**パリティ変換**ともよばれ, 記号 P で表す. このとき 4 元運動量の空間成分 $\boldsymbol{p}$ は $-\boldsymbol{p}$ に変換される. 一方, 角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は $(-\boldsymbol{r})\times(-\boldsymbol{p})=+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ だから, $\boldsymbol{L}\to+\boldsymbol{L}$ である. このように同じベクトルでも空間反転の下で符号を変えるものと, 不変なものの 2 通りがある. 前者を**極性** (polar) **ベクトル** (V と書く), 後者を**軸性** (axial) **ベクトル** (A と書く) とよぶ. 例えば電場 $\boldsymbol{E}(=-\nabla\phi-\partial\boldsymbol{A}/\partial t)$ は極性ベクトルであり, 磁場 $\boldsymbol{B}(=\nabla\times\boldsymbol{A})$ は軸性ベクトルである. スピン演算子 $\boldsymbol{\sigma}$ は角運動量に対応するから空間反転で符号を変えない. すなわち

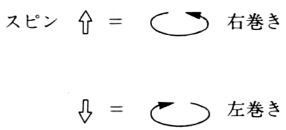
$$\boldsymbol{p} \xrightarrow[P]{} -\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{\sigma} \xrightarrow[P]{} +\boldsymbol{\sigma} \tag{4.71}$$

である. したがって 4.4.1 項で述べた性質(1)から

$$\phi_{\rm R} \xleftrightarrow[P]{} \phi_{\rm L} \tag{4.72}$$

となることがわかる.

4.4.1項でニュートリノは ψ_L で表される左巻き粒子であると述べたが，パリティ変換 P の下で ψ_L は ψ_R に変り，これはニュートリノではない．右巻きのニュートリノが存在しないことが実験的に確かめられているから，このことはニュートリノが空間反転の対称性を破ることを意味する．これを**パリティの非保存**とよぶ．空間反転 $(x, y, z)\rightarrow(-x, -y, -z)$ に x 軸のまわりの 180° 回転 $(-x, -y, -z)\rightarrow(-x, y, z)$ を行うと結果は $x\rightarrow -x$，$y\rightarrow y$，$z\rightarrow z$，すなわち**鏡像反転**になる．したがってパリティ非保存は鏡に映した左右逆転の世界が存在しないことを意味する．式 (4.71) と式 (4.72) をニュートリノに対して図示すると図 4.1 となる．



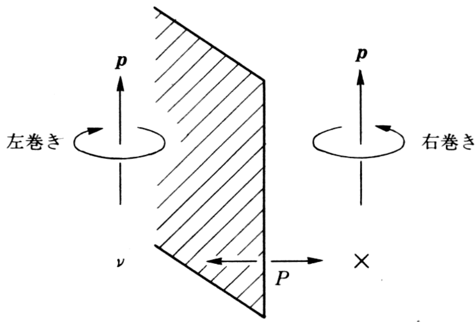


図 4.1　ニュートリノとパリティ非保存

4.4.3　双一次形式

一般に座標変換 $x^{\mu}\rightarrow x^{\mu'}$ の下で $T^{\mu\nu\cdots\cdots}$ が

$$(T^{\mu\nu\cdots\cdots})' = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\beta}} \cdots\cdots T^{\alpha\beta\cdots\cdots} \tag{4.73}$$

と変換するとき，$T^{\mu\nu\cdots\cdots}$ を（反変）**テンソル**とよぶ．また添字 $(\mu\nu\cdots\cdots)$ の数を**階数**とよぶ．特に 0 階のテンソルをスカラー，1 階のテンソルをベクトルとよぶ．

4 元スピノール ψ は空間回転の下で「半分」しか回転しない

からこのままではテンソルとなれない．ψ を「二つ」掛けてテンソルが作られる．

座標変換（4.16）の下で ψ は式（4.17）のように変換する．特に回転に対しては式（4.40）で与えられることを見た．このとき，$\boldsymbol{\sigma}^\dagger=\boldsymbol{\sigma}$ を用いて $S(\boldsymbol{\theta})$ は

$$S(\boldsymbol{\theta})^\dagger = e^{-i\theta^i\tilde{\sigma}_i{}^\dagger/2} = e^{-\theta^i\tilde{\sigma}_i/2} = S(\boldsymbol{\theta})^{-1} \tag{4.74}$$

である．一方ローレンツ・ブーストに対しては式（4.47）より

$$S(\boldsymbol{\alpha})^\dagger = e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger/2} = \gamma^0 e^{+\boldsymbol{\alpha}\cdot\bar{\boldsymbol{\sigma}}/2}\gamma^0 = \gamma^0 S(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\gamma^0 \tag{4.75}$$

である．ここで式（4.11）の γ^0 を用いて $\gamma^0\bar{\boldsymbol{\sigma}}\gamma^0=-\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ であることを使った．さらに，$\gamma^0\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i\gamma^0=+\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i$ を使うと，式（4.74）と式（4.75）は一つにまとめられ

$$S(a)^{-1} = \gamma^0 S(a)^\dagger\gamma^0 \tag{4.76}$$

となる．したがって $\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0\to\psi^\dagger S^\dagger\gamma^0=\psi^\dagger\gamma^0 S^{-1}=\bar{\psi}S^{-1}$，すなわち

$$\bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}(x)S(a)^{-1} \tag{4.77}$$

である．

式(4.72)と式(4.77)を用いて ψ と $\bar{\psi}$ から作られる双一次形式の変換性を調べよう．

(1) スカラー $(S,\ 0^+)$：$\bar{\psi}\psi$

$$\bar{\psi}\psi \xrightarrow[S(a)]{} \bar{\psi}S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi \tag{4.78}$$

となるからこれはスカラーである．

一方パリティ変換の下では，γ^μ に対するカイラル表現（4.62）を用いて

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi &= (\psi_R{}^\dagger,\ \psi_L{}^\dagger)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_R\\ \psi_L\end{pmatrix} = \psi_L{}^\dagger\psi_R+\psi_R{}^\dagger\psi_L\\ &\xrightarrow[P]{} \psi_R{}^\dagger\psi_L+\psi_L{}^\dagger\psi_R = \bar{\psi}\psi\end{aligned} \tag{4.79}$$

となり，たしかに $\bar{\psi}\psi$ は「本当の」スカラーである．

(2) プシュードスカラー $(P,0^-)$：$\bar{\psi}\gamma^5\psi$

標準表現（4.11）を用いると

$$\gamma^5=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

であるから $[\gamma^5, S]=0$ である．したがって

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \xrightarrow[S(a)]{} +\bar{\psi}\gamma^5\psi \tag{4.80}$$

で，これはたしかにローレンツ・スカラーであるが，一方，パリティ変換の下では式 (4.62) の γ^0 と式 (4.67) の γ^5 を用いて

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi = \psi_L{}^\dagger\psi_R - \psi_R{}^\dagger\psi_L \xrightarrow[P]{} \psi_R{}^\dagger\psi_L - \psi_L{}^\dagger\psi_R = -\bar{\psi}\gamma^5\psi \tag{4.81}$$

となって符号が変る．このように空間反転で符号の変るスカラーを**プシュード（擬）スカラー**とよぶ．例えば π 中間子はスピン・ゼロのプシュードスカラーである．

一般に空間反転で符号が変るかどうかを**パリティ**（偶奇性）とよぶ．スピン J とパリティ P を J^P と表すと，例えば $\pi=0^-$ と表すことができる．

(3)　ベクトル（V，1^-）：$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

前と同様にして

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \xrightarrow[S(a)]{} \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0\gamma^\mu S\psi &= \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1}\gamma^\mu S\psi = a^\mu{}_\nu\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\nu\psi \\ &= a^\mu{}_\nu\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu}(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi)\end{aligned} \tag{4.82}$$

ここで式(4.21)を用いた．

式 (4.73) より，$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ は 1 階のテンソル，すなわちベクトルの変換性をもつことがわかる．したがってこれはベクトルである．

まったく同様にして以下の二つが得られる．

(4)　アクシャルベクトル（A，1^+）：$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$

(5)　テンソル（T，2^+）：$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$

$\sigma^{\mu\nu}$ は式 (4.29) で与えられる．したがってこれは 2 階の反対称テンソルであり，独立成分は 6 個ある．

γ^μ は 4×4 行列であるから独立成分は 16 ある．したがって Γ を γ^μ の組合せとすると，これで作られる双一次形式 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ も独立なものが 16 あるが，これが

$$\begin{array}{ccccc} (S) & (P) & (V) & (A) & (T) \\ \bar{\psi}\psi, & \bar{\psi}\gamma^5\psi, & \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, & \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, & \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \\ 1 \quad + & 1 \quad + & 4 \quad + & 4 \quad + & 6 \quad =16 \end{array}$$

に対応しており，これですべて尽されたことになる．

$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ はベクトルであるから，ベクトル ∂_μ との内積 $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ はスカラーとなる．また $\bar{\psi}\psi$ はそのままスカラーであるから，これらを組み合せて作られた式 (4.15) のラグランジアンはスカラーであり，たしかにこれをディラック・ラグランジアンと見なしてよいことが示された．

4.5 ディラック場の量子化

$\psi(x)$ の平面波展開は式 (4.45) を考慮して

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{\alpha=1,2} [b_\alpha(\boldsymbol{p})\, u_\alpha(\boldsymbol{p})\, e^{-ip\cdot x} \\ &\qquad + d_\alpha{}^\dagger(\boldsymbol{p})\, v_\alpha(\boldsymbol{p})\, e^{+ip\cdot x}] \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_{\alpha=1,2} [b_\alpha{}^\dagger(\boldsymbol{p})\, \bar{u}_\alpha(\boldsymbol{p})\, e^{+ip\cdot x} \\ &\qquad + d_\alpha(\boldsymbol{p})\, \bar{v}_\alpha(\boldsymbol{p})\, e^{-ip\cdot x}] \end{aligned} \tag{4.83}$$

と書ける．この ψ，$\bar{\psi}$ を量子化する．ラグランジアン (4.15) より，ψ の共役運動量 π は

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger \tag{4.84}$$

したがってハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3 x (\pi\dot{\psi} - \mathcal{L}) \\ &= \int \mathrm{d}^3 x\ \pi\dot{\psi} = \int \mathrm{d}^3 x\ \bar{\psi} i\gamma^0 \partial_0 \psi \\ &= \int \mathrm{d}^3 p\ E \sum_\alpha [b_\alpha{}^\dagger(\boldsymbol{p})\, b_\alpha(\boldsymbol{p}) - d_\alpha(\boldsymbol{p})\, d_\alpha{}^\dagger(\boldsymbol{p})] \end{aligned} \tag{4.85}$$

となる．ここで $\mathcal{L}$ はディラック方程式 (4.13) を用いてゼロに等しい（！）ことと，規格直交条件

$$u_\alpha{}^\dagger(\boldsymbol{p})\,u_\beta(\boldsymbol{p}) = v_\alpha{}^\dagger(\boldsymbol{p})\,v_\beta(\boldsymbol{p}) = \frac{E}{m}\delta_{\alpha\beta}$$
$$u_\alpha{}^\dagger(\boldsymbol{p})\,v_\beta(-\boldsymbol{p}) = v_\alpha{}^\dagger(\boldsymbol{p})\,u_\beta(-\boldsymbol{p}) = 0 \tag{4.86}$$

を用いた．式(4.86)は式(4.52)から直接確かめることができる．

問題　式（4.83）を代入して式（4.85）を確かめよ．

式（4.85）の積分内の第2項に現れるマイナス符号に注意しよう．エネルギーは必ず正になってほしい．なぜなら負エネルギー状態を許せばあらゆる状態は負エネルギー状態に落ち込んでしまい．安定な正エネルギー状態が保てなくなるからである(原子内電子のような束縛状態が負のエネルギーというのは単にエネルギーの原点を無限遠方でゼロと約束したからである．これはいくらでも大きな負のエネルギー状態を許すということとまったく異なる)．負エネルギーの困難を避けるには次のようにすればよい．

もし通常の量子化に従うとすれば $[\psi, \pi]=i\delta$，あるいは式(4.84)を用いて $[\psi, \psi^\dagger]=\delta$ であるが，交換関係 $[A, B]$ を**反交換関係** $\{A, B\}=AB+BA$ に変えた

$$\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x}, t),\quad \psi_\beta{}^\dagger(\boldsymbol{x}', t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$
$$\{\psi, \psi\} = \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0 \tag{4.87}$$

を量子化条件として採用することにする．式（4.83）を代入して $b_\alpha(\boldsymbol{p})$，$d_\alpha(\boldsymbol{p})$ の交換関係に書き直すとこれは

$$\{b_\alpha(\boldsymbol{p}), b_\beta{}^\dagger(\boldsymbol{p}')\} = \{d_\alpha(\boldsymbol{p}), d_\beta{}^\dagger(\boldsymbol{p}')\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$$

その他の反交換関係はすべてゼロ　(4.88)

となる．

このような反交換関係を満足する演算子はどのような性質をもっているかを調べよう（交換関係の場合の式(2.47)以下と比較せよ）．

演算子 b，$b^\dagger$ に対して

$$\{b, b^\dagger\} = 1, \qquad \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0 \tag{4.89}$$

を要求する．このとき新しく演算子 $N = b^\dagger b$ を導入し，その固有ベクトルを $|n\rangle$，固有値を n とする．すなわち $N|n\rangle = n|n\rangle$ である．式（4.89）から

$$N^2 = b^\dagger b b^\dagger b = b^\dagger(1 - b^\dagger b) b = b^\dagger b = N \tag{4.90}$$

が成り立つから，N の固有値は 0 または 1 であり，固有ベクトルは $|0\rangle$ と $|1\rangle$ のみである．また，

$$N b^\dagger|0\rangle = b^\dagger b b^\dagger|0\rangle = b^\dagger(1 - b^\dagger b)|0\rangle = b^\dagger|0\rangle \tag{4.91}$$

だから $b^\dagger|0\rangle$ は N の固有値が 1 の固有ベクトルである．したがって

$$b^\dagger|0\rangle = |1\rangle \tag{4.92}$$

同様にして

$$b|1\rangle = |0\rangle, \qquad b|0\rangle = 0, \qquad b^\dagger|1\rangle = 0 \tag{4.93}$$

がいえるから結局，$b^\dagger$ は生成演算子，b は消滅演算子であり，反交換関係（4.88）を満足する系では $\boldsymbol{p}$ と α を指定された状態には最大一つの粒子しか入れない．このような粒子を**フェルミオン**（またはフェルミ粒子）とよぶ．それに対して 2.3 節で見た電磁場のような，交換関係で量子化条件が与えられ，一つの状態にいくつでも粒子が入ることができるとき，このような粒子を**ボソン**（またはボース粒子）とよぶ．電子はフェルミオンであり，フォトンはボソンである．低温におけるボース凝縮，フェルミ気体等の物性物理学はこの特性を利用して数々の応用に用いられる．一般に整数スピンの粒子はボソン，半整数スピンの粒子はフェルミオンであることがいえる．これを**スピンと統計の関係**とよぶ．

式（4.88）を式（4.85）に代入して（零点エネルギーを除いて）

$$H = \int d^3p\, E \sum_\alpha [b_\alpha^\dagger(\boldsymbol{p})\, b_\alpha(\boldsymbol{p}) + d_\alpha^\dagger(\boldsymbol{p})\, d_\alpha(\boldsymbol{p})] \tag{4.94}$$

となる．$b^\dagger b$ と $d^\dagger d$ はそれぞれ b および d 粒子の個数演算子であるから，式（4.94）はエネルギー E の b 粒子と d 粒子の

総和が全エネルギーを与える式となっており，負エネルギーは現れない．

では b 粒子と d 粒子の違いは何か．これを見るには 3.3 節で与えたネーターの定理を用いる．式 (4.15) のラグランジアンは大域的位相変換

$$\psi \longrightarrow e^{-ie\Lambda}\psi, \qquad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}e^{+ie\Lambda} \qquad (\Lambda \text{ は定数}) \tag{4.95}$$

の下で不変である．したがって式 (3.24) で与えられる保存カレント J^μ があり（定数 Λ は J^μ の定義から除く），

$$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \qquad \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{4.96}$$

である．保存量 Q は式 (4.83) を代入して（再び零点エネルギーを除いて）

$$\begin{aligned} Q &= \int \mathrm{d}^3x\, J^0 = e\int \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger\psi \\ &= e\int \mathrm{d}^3p \sum_\alpha [b_\alpha{}^\dagger(\boldsymbol{p})\, b_\alpha(\boldsymbol{p}) - d_\alpha{}^\dagger(\boldsymbol{p})\, d_\alpha(\boldsymbol{p})] \end{aligned} \tag{4.97}$$

を得る．

問題　式(4.97)を確かめよ．

式 (4.97) の意味は明らかである．b 粒子は電荷 e をもち，d 粒子は電荷 $-e$ をもつ．このとき系の電荷 Q はこれらの電荷の総和で与えられる．

$$Q = eN_b + (-e)N_d \tag{4.98}$$

b に対応する量子を粒子とよぶことにすると d に対応する量子は**反粒子**とよばれる．電子 (e^-) の反粒子を**陽電子** (e^+) とよぶ（この節では電子電荷を e としているから $e<0$ である）．クォークの反粒子を**反クォーク** ($\bar{q}$)，ニュートリノについては**反ニュートリノ** ($\bar{\nu}$) とよぶ．

初めに戻って式 (4.83) を見よう．$\psi(x)$ は粒子を消す (b) あるいは反粒子を作る ($d^\dagger$)．粒子，反粒子の波動関数がそれぞれ u，v である．このように $\psi(x)$ は単なる波動関数ではなく，

粒子の生成・消滅を記述する場の演算子となっている.

参　考　文　献

1) Bjorken, J. D. and Drell, S. D.: Relativistic Quantum Mechanics (McGraw-Hill, 1964).

5 プロパゲーター

5.1 スカラー場

2.2.2 項でスカラー場に対する非相対論的なプロパゲーターについて議論した．相対論を考慮するとこれはそのままでは使えない．なぜなら時間の情報が一切入っていないからである．source からの情報がある有限の速さで伝わり，過去の情報が現在に伝わる，あるいは現在の情報が未来に伝わるという，**因果律**を正しく反映したプロパゲーターが必要となる．

3.3 節で考察した複素スカラー場を例にとろう．式 (3.19) より，粒子 a (電荷 $+1$) の 1 粒子状態は真空を $|0\rangle$ として

$$\Psi_+(\boldsymbol{x}, t) = \phi^*(\boldsymbol{x}, t)|0\rangle = \phi^{*(-)}(\boldsymbol{x}, t)|0\rangle$$
$$\phi^{*(-)}(\boldsymbol{x}, t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{+ik\cdot x} \tag{5.1}$$

である．ここで式 (3.19) の第 2 式を真空に掛けたとき $b|0\rangle = 0$ であることを用いた．この粒子 a が $t' > t$ を満足する点 $(\boldsymbol{x}', t')$ に伝播する振幅は

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

を用いて

$$\theta(t'-t)\langle \Psi_+(\boldsymbol{x}', t') | \Psi_+(\boldsymbol{x}, t)\rangle$$

$$= \langle 0|\phi(\boldsymbol{x}', t')\phi^*(\boldsymbol{x}, t)|0\rangle\theta(t'-t)$$
$$= \langle 0|\phi^{(+)}(\boldsymbol{x}', t')\phi^{*(-)}(\boldsymbol{x}, t)|0\rangle\theta(t'-t) \tag{5.2}$$

ただし

$$\phi^{(+)}(\boldsymbol{x}, t) = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}a(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x} \tag{5.3}$$

である．前と同様に $\langle 0|b^\dagger=0$ を用いた．ϕ の肩の (+) と (−) はそれぞれ正と負の振動数成分 $e^{\mp ik\cdot x}$ に対応することを意味している（歴史的に正・負をこうよぶのが慣例である）．

式 (5.2) は時刻 t に点 $\boldsymbol{x}$ で粒子 a が作られ，空間を伝播して**その後の時刻** t' に点 $\boldsymbol{x}'$ で消滅したことを表している．まったく同じ現象，すなわち $(\boldsymbol{x}, t)$ で電荷が 1 増え，$(\boldsymbol{x}', t')$ で電荷が 1 減少するためには，電荷 -1 の粒子 b が $(\boldsymbol{x}', t')$ で作られてこれが空間を伝播し，**その後の時刻** t に点 $\boldsymbol{x}$ でこれが消滅してもよい．

$$\theta(t-t')\langle\Psi_-(\boldsymbol{x}, t)|\Psi_-(\boldsymbol{x}', t')\rangle$$
$$= \langle 0|\phi^*(\boldsymbol{x}, t)\phi(\boldsymbol{x}', t')|0\rangle\theta(t-t')$$
$$= \langle 0|\phi^{*(+)}(\boldsymbol{x}, t)\phi^{(-)}(\boldsymbol{x}', t')|0\rangle\theta(t-t') \tag{5.4}$$

$$\phi^{(-)}(\boldsymbol{x}, t) = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}b^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x}$$
$$\phi^{*(+)}(\boldsymbol{x}, t) = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}}b(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x} \tag{5.5}$$

この意味で，反粒子とは時間を逆向きに進む粒子に等しい．例えば外から電場がかけられている空間でプラス電荷が点 A

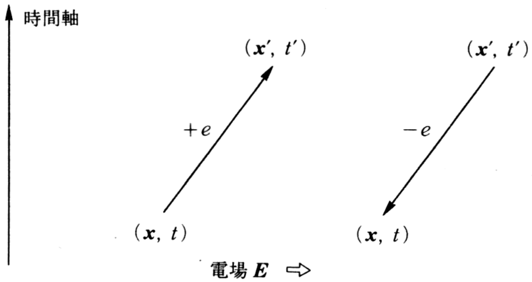


図 5.1　粒子・反粒子と時間軸の向き

から点 B へ移動したとしよう．これを映画にとってフィルムを逆回しにする（時間軸の向きを逆にする）と，プラス電荷が点 B から点 A に移動する様が見られるが，このとき電場の方向はもとのままであるから，これはマイナスの電荷が時間軸の正方向に運動している自然な姿に等しい（図 5.1）．

プロパゲーターはしたがって式(5.2)と式(5.4)を加えて

$$
\begin{aligned}
i\Delta_{\mathrm{F}}(x'-x) &= \langle 0|T(\phi(x')\phi^*(x))|0\rangle \\
&\equiv \theta(t'-t)\langle 0|\phi(x')\phi^*(x)|0\rangle \\
&\quad + \theta(t-t')\langle 0|\phi^*(x)\phi(x')|0\rangle \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

と書くことができる．Δ_{F} を**ファインマン・プロパゲーター**とよぶ．また，記号 $T(AB)$ を T 積とよぶ．すなわち $T(AB)=\theta(t_A-t_B)AB+\theta(t_B-t_A)BA$ である．

式（5.6）の具体的な形を求めよう．式（3.19）と式（3.20）を用いて

$$
\begin{aligned}
i\Delta_{\mathrm{F}}(x'-x) &= \theta(t'-t)\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}e^{-ik\cdot(x'-x)} \\
&\quad + \theta(t-t')\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega}e^{+ik\cdot(x'-x)} \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

となる．

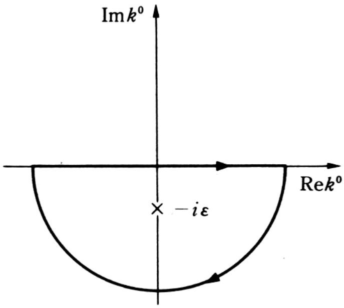
問題　式(5.7)を導け．

ここで θ 関数の積分表示

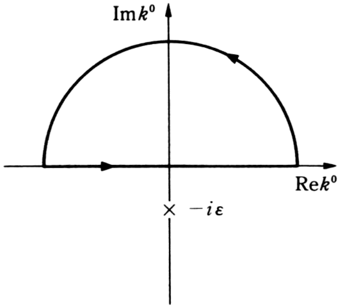
$$
\theta(t) = \frac{-1}{2\pi i}\int \mathrm{d}k^0\frac{e^{-ik^0t}}{k^0+i\varepsilon} \qquad (\varepsilon \text{ は正の微小量}) \qquad (5.8)
$$

を用いる．式（5.8）において $t>0$ のときは複素 k^0 面の下半面で積分を実行すると $k^0=-i\varepsilon$ の pole を拾って $+1$ となり，$t<0$ のときは上半面で積分してゼロとなるから，たしかにこれは $\theta(t)$ に等しい(図 5.2)．式（5.8）を少し変形した

$$
\theta(t'-t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\mathrm{d}k^0}{k^0+i\varepsilon}e^{-ik^0(t'-t)}
$$



(a)　$t>0$ のとき



(b)　$t<0$ のとき

図 5.2　式(5.8)の積分路

$$\theta(t-t') = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\mathrm{d}k^0}{k^0 - i\varepsilon} e^{-ik^0(t'-t)} \tag{5.9}$$

を式 (5.7) に代入して $\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ を用いると（式(5.7)で $ik\cdot x = i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$ ($\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$) に注意，また第 2 項で $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$ とおく）

$$i\Delta_{\mathrm{F}}(x'-x) = i\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x'-x)} \frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}}$$
$$\times\left(\frac{1}{k^0 - \sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2} + i\varepsilon} - \frac{1}{k^0 + \sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2} - i\varepsilon}\right)$$
$$= i\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik\cdot(x'-x)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{5.10}$$

実際，式 (5.10) から

$$(\Box + m^2)\Delta_{\mathrm{F}}(x'-x) = -\delta^4(x'-x) \tag{5.11}$$

が得られ，たしかに Δ_{F} はクライン-ゴルドン方程式のグリーン関数であり，そのフーリエ変換

$$i\tilde{\Delta}_{\mathrm{F}}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{5.12}$$

は，式 (2.21) で与えた非相対論的プロパゲーターの，相対論的拡張となっている．因果律は θ 関数を通して分母の $i\varepsilon$ に反映されていることに注意．

5.2 ゲ ー ジ 場

ゲージ場の場合，ラグランジアンに最初から質量項 (1/2) $m^2 A_\mu A^\mu$ を入れておくと，ゲージ不変性を破ってしまう（これは式 (3.39) から明らかであろう）．したがって質量は別の方法で導くことにし，ここでは質量はゼロとしよう．質量の導入は7章で考えることにする．したがって内部自由度を別にすれば一般のゲージ場に対しても電磁場と実質的に同じ量子化が適用できる．

式 (2.30) は一つの偏光状態に対する式であるからこれを一般化して

$$A_\mu(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2\omega(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon_\mu(k,\lambda)\left[a(k,\lambda)\, e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(k,\lambda)\, e^{ik\cdot x}\right] \tag{5.13}$$

とおく．$\varepsilon_\mu(k,\lambda)$ は偏光ベクトルである．

スカラー場の場合とまったく同様にしてゲージ場のプロパゲーターは

$$\begin{aligned} iD_{\mathrm{F}}(x'-x)_{\mu\nu} &\equiv \langle 0|\, T(A_\mu(x')A_\nu(x))\,|0\rangle \\ &= i\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik\cdot(x'-x)}}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon_\mu(k,\lambda)\,\varepsilon_\nu(k,\lambda) \end{aligned} \tag{5.14}$$

となる．2.3 節で考察したクーロン・ゲージでは $\varepsilon^\mu(k,\lambda) = (0, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda))$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ であった．この場合，式 (5.14) は座標のとり方に依存し，ローレンツ共変ではない．座標の選び方によらない一般的な形を求めるために次の二つのベクトルを導入する[1]．

$$\eta^\mu = (1, 0, 0, 0) \tag{5.15}$$

$$\hat{k}^\mu = \frac{k^\mu - (k\cdot\eta)\,\eta^\mu}{\sqrt{(k\cdot\eta)^2 - k^2}} \tag{5.16}$$

任意の k^μ に対して空間的ベクトル $\varepsilon^\mu(k,1)$, $\varepsilon^\mu(k,2)$, $\hat{k}^\mu$, およ

び時間的ベクトル η^μ の四つは互いに直交する独立なベクトルで，完全系を作っている．このとき

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon_\mu(k,\lambda)\varepsilon_\nu(k,\lambda) = -g_{\mu\nu}+\eta_\mu\eta_\nu-\hat{k}_\mu\hat{k}_\nu \tag{5.17}$$

と書くことができる．$g_{\mu\nu}$ は式 (4.12) で導入したミンコフスキー空間の計量テンソルである．実際，式 (5.17) を特別な場合 $\varepsilon^\mu=(0,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k}))$ に当てはめてみると，右辺は $\mu,\nu=0$ のときゼロ，$\mu,\nu=i,j$ のときは $\delta_{ij}-k_ik_j/\boldsymbol{k}^2$ となって，これは式 (2.43)，(2.44) で導入した横波を取り出す射影演算子であり，式 (5.14) は横波だけが伝播することを表す．式 (5.17) は座標系の選び方によらないその一般形となっている（共変な形をしており，特別な系をとるとたしかに正しいならばこれは一般に正しい，という論法が相対論の手法である）．

式 (5.16) を用いて式 (5.17) は

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{2} &\varepsilon_\mu(k,\lambda)\varepsilon_\nu(k,\lambda)\\ &= -g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{(k\cdot\eta)^2-k^2}+\frac{(k\cdot\eta)(k_\mu\eta_\nu+k_\nu\eta_\mu)}{(k\cdot\eta)^2-k^2}\\ &\quad -\frac{k^2\eta_\mu\eta_\nu}{(k\cdot\eta)^2-k^2}\end{aligned} \tag{5.18}$$

となる．式 (5.18) の第 2 項と第 3 項は k_μ に比例している．後にわかるようにゲージ場のプロパゲーターは必ず保存カレント $J^\mu(x)$ にサンドイッチされた形でのみ現れる．保存カレント $\partial_\mu J^\mu=0$ に対してはフーリエ変換をとって $k_\mu\tilde{J}^\mu(k)=0$ であるから，実際これら二つの項は利いてこない，最後の項は式 (5.14) より（特別な座標系 $\eta^\mu=(1,0,0,0)$ をとって）

$$\begin{aligned}\int&\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x'-x)}}{(k\cdot\eta)^2-k^2}\eta_\mu\eta_\nu\\ &=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\int\frac{\mathrm{d}k^0}{2\pi}e^{-ik^0(t'-t)}\\ &=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}\delta(t'-t)\end{aligned} \tag{5.19}$$

となるが，これはクーロン・ポテンシャルと同じ形をしている

からこの寄与は静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ のクーロン相互作用と打ち消し合って光子場には利いてこない．結局，ゲージ場のプロパゲーターとしては第1項の $g_{\mu\nu}$ だけが残り，

$$iD_{\mathrm{F}}(x'-x)_{\mu\nu} = -ig_{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x'-x)}}{k^2+i\varepsilon} \tag{5.20}$$

あるいはフーリエ変換をとって

$$i\tilde{D}_{\mathrm{F}}(p) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} \tag{5.21}$$

がゲージ場のファインマン・プロパゲーターとなる．

5.3 ディラック場

まったく同様にしてディラック場に対するプロパゲーターを求めることができる．

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{F}}(x'-x)_{\beta\alpha} &\equiv \langle 0|T(\psi_\beta(x')\bar{\psi}_\alpha(x))|0\rangle \\ &= \langle 0|\psi_\beta(x')\bar{\psi}_\alpha(x)|0\rangle\theta(t'-t) \\ &\quad - \langle 0|\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x')|0\rangle\theta(t-t') \end{aligned} \tag{5.22}$$

ここでT積をとるときディラック場の反交換性を考慮して第2項の符号を逆転させていることに注意．両辺に $(i\gamma^\mu\partial_\mu'-m)$ を掛けるとディラック方程式 (4.13) を用いて θ 関数の微分のみが残り，

$$\begin{aligned} &(i\gamma^\mu\partial_\mu'-m)_{\rho\beta}S_{\mathrm{F}}(x'-x)_{\beta\alpha} \\ &\quad = \gamma^0_{\rho\beta}[\langle 0|\psi_\beta(x')\psi_\lambda{}^\dagger(x)\gamma^0_{\lambda\alpha}|0\rangle \\ &\qquad\quad + \langle 0|\psi_\lambda{}^\dagger(x)\gamma^0_{\lambda\alpha}\psi_\beta(x')|0\rangle]\delta(t'-t) \\ &\quad = \gamma^0_{\rho\beta}[\langle 0|\{\psi_\beta(x'), \psi_\lambda{}^\dagger(x)\}|0\rangle\gamma^0_{\lambda\alpha}]\delta(t'-t) \\ &\quad = \gamma^0_{\rho\beta}\delta_{\beta\lambda}\gamma^0_{\lambda\alpha}\delta^4(x'-x) = \delta_{\rho\alpha}\delta^4(x'-x) \end{aligned} \tag{5.23}$$

ここで式 (4.87) を用いた．式 (5.23) は結局次のように表せる．

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu'-m)S_{\mathrm{F}}(x'-x) = \delta^4(x'-x) \tag{5.24}$$

$S_{\mathrm{F}}(x'-x)$ のフーリエ変換 $\tilde{S}_{\mathrm{F}}(p)$ を用いると

$$S_{\mathrm{F}}(x'-x) = \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip\cdot(x'-x)}\tilde{S}_{\mathrm{F}}(p) \tag{5.25}$$

であるが，式（5.24）より，これは

$$(\gamma\cdot p-m)\,\tilde{S}_{\mathrm{F}}(p)=1 \tag{5.26}$$

あるいは

$$\tilde{S}_{\mathrm{F}}(p)=\frac{1}{\gamma\cdot p-m}=\frac{\gamma\cdot p+m}{p^2-m^2} \tag{5.27}$$

を意味する．前と同様，因果律を意味する $i\varepsilon$ を考慮して結局ディラック場のファインマン・プロパゲーターは

$$i\tilde{S}_{\mathrm{F}}(p)=\frac{i(\gamma\cdot p+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon} \tag{5.28}$$

となる．式（5.28）の分母の $i\varepsilon$ については 8.1 節で再び議論する．

なお，式（5.12），（5.21）および（5.28）の分子の i は歴史的に便宜上つけられているもので本質とは関係がない．

以上をまとめると次のようになる．プロパゲーターを求めるには波動方程式の右辺をデルタ関数におき換え，フーリエ変換を行えばよい．ここまでは 2.2.2 項で議論したことのくり返しである．さらにここで因果律を考慮すると，これは結果的には $+i\varepsilon$ を分母につけ加えればよいことがわかった．

$i\varepsilon$ のおかげで分母がゼロのときの特異点が避けられる．積分の道筋で分母がゼロとなる特異点を通り過ぎるとき右か左によける．ちょうど雨上がりの道路を歩くとき，前方の水たまりを右によけるか左によけるかのように，右によけて留数として拾い上げるか，左によけて素通りするかで因果律が反映される．微分方程式は境界条件を与えてはじめて解が一意的に決まるから，因果律は境界条件を与えることと同値である．すなわち $\theta(t-t')$ は $t\to\pm\infty$ での解の形を決めることに対応している．

それでも $p^2=m^2$ のとき，分母に $i\varepsilon$ だけが残ってなんとなく気持ちが悪い．実はプロパゲーターの分母は実際の問題に当てはめるとき，ゼロになることはないのである．再び図 1.1 (a) を見よう．右側の電子 1 が電磁場の source となってフォトンを放出する．これが式（5.20）または式（5.21）のプロパゲー

ターとして空間を伝播し，左側の電子 2 によって吸収される．あるいは電子 1 と 2 の役割を変えても同じことである．これが電磁相互作用である．フォトンを放出・吸収と書いたが，はたしてこのフォトンはどんなものなのかを考えよう．

真空中で電子が実際にフォトンを放出することはない．これはエネルギー・運動量の保存則からただちにわかる．運動量 p の電子が運動量 k のフォトンを放出して運動量 p' の電子になったとすると，$k^2=(p-p')^2$ である．これはローレンツ不変量であるからどんな系で計算してもよい．例えば $p=(m,0,0,0)$ の静止系では

$$k^2 = (p-p')^2 = 2m^2-2p\cdot p' = 2m(m-E') < 0 \qquad (5.29)$$

であり，実フォトンの条件 $k^2=0$ を満足しない（E' も m に等しければ $k^\mu=0$ で，そもそもフォトンが出ない）．したがってこのような反応は起こらないのである．すると図 1.1(a) で交換されているフォトンは何か，式 (5.29) から明らかなように，これは式 (3.7) の on-shell 条件を満足していない．このような粒子を **off-shell**（オフシェル）または **virtual**（仮想）粒子とよぶ（「仮想」という言葉は誤解を招くので以下 virtual を使う）．図 1.1(a) のプロパゲーターのフォトンは $k^2<0$ (**space-like,** 空間的）を満足する virtual 粒子であって実フォトンではない．二つの電子の間に検出器を置いて飛んでくるフォトンを実際につかまえることはできないのである．

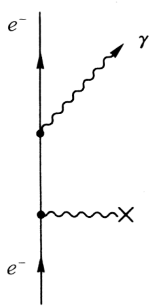


図 5.3 制動放射．×は他の電磁場の source（例えば原子核）を表す．

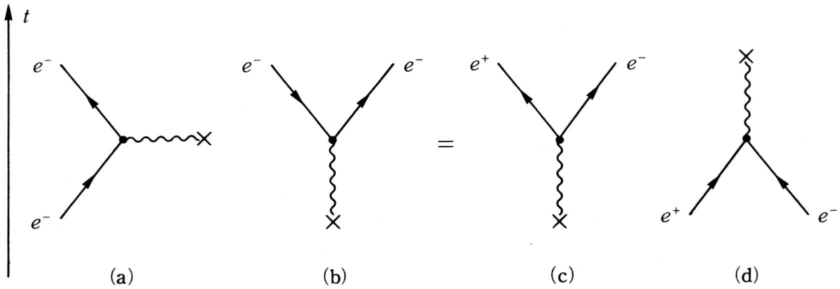


図 5.4　$e^+ e^-$ の対生成（c）と対消滅（d）

制動放射のように電子が実際に実フォトンを放出するような過程は，必ず全体のエネルギー・運動量を保存するように他のフォトンの source（例えば原子核）が存在する必要がある（図 5.3）．

図 1.1(a) の左半分だけに注目しよう（図 5.4(a)）．図 5.4 において時間軸は上向きにとってある．図 5.4(a) を 90° 回転して図 5.4(b) を作る．図 5.4(b) において左側の電子は時間軸を逆向きに運動している．5.1 節に示したようにこれは反粒子が時間の正の向きに運動することと同値である（図 5.4(c)）．結局，図 5.4(c) はフォトンによって電子・陽電子の**対生成**が起こったと解釈できる．この場合のフォトンもすぐわかるように $k^2>0$（**time-like,** 時間的）の virtual フォトンである．その逆過程である**対消滅**も同様に議論できる（図 5.4(d)）．

参　考　文　献

1)　Bjorken, J. D. and Drell, S. D. : Relativistic Quantum Fields (McGraw-Hill, 1965).

6　弱・電磁相互作用

6.1　相互作用の導出

ようやく準備が整った．この章では実際に粒子間相互作用をゲージ理論に従って導く．その手法を最初にまとめておこう．

(1)　クォークおよびレプトンに対する自由場のラグランジアンを与える．

自由場のラグランジアンはオイラー方程式が自由場のディラック方程式を導くように与える．ラグランジアンが大域的ゲージ不変性を満足していることを確認する．

(2)　与えられたラグランジアンが局所的ゲージ不変性を満足するように微分を共変微分に変える．

したがって対応するゲージ場が導入される．ゲージ不変性は可能な限り与えるから，それに応じてゲージ場も可能な限り導入する．

(3)　結果はもとの物質場と，導入したゲージ場の相互作用を決める形となっている．

ここではまず (1) について考える．レプトンおよびクォークは 1.1 節で述べたように 3 世代をもつ (表 1.1 参照)．なぜ 3 世代あるのか，世代間の関係は何か，世代を決めるダイナミクスは何か，について現在のところ確定的な答は得られていない．

世代間のギャップ，世代問題の解決は素粒子でも一般社会同様，解決すべき宿題である．くわしくは 11 章で議論することにし，ここでは 1 世代についてのみ考える．世代はどの世代であってもかまわないので具体的に第 1 世代をとって議論する．

レプトンはしたがって電子 e^- とそのニュートリノ ν_e であるが，4.4 節に述べたようにニュートリノは左巻き成分しかもっていない．対称性の異なるものを一つにまとめることはできないので結局 ν_e と組ませることのできるのは電子の左巻き成分のみであり，右巻き成分は単独に残る．

$$\text{レプトン：}\quad L = \begin{pmatrix} \nu_{\mathrm{L}} \\ e_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \qquad R = e_{\mathrm{R}} \tag{6.1}$$

ここで $e_{\mathrm{L}}, e_{\mathrm{R}}$ は電子波動関数 e に対して式（4.68）の射影演算子を用いて $e_{\mathrm{L}}=P_{\mathrm{L}}e,\ e_{\mathrm{R}}=P_{\mathrm{R}}e$ である．

クォークの方も同様に第 1 世代は u と d であるが，この場合はカラーの自由度がある．カラーに対するゲージ理論は量子色力学（QCD）となるが，これについては 9 章で述べることにし，ここでは一つの色（例えば赤）に限定して話を進める．したがってこの章では電磁相互作用と弱い相互作用のみを扱うことになる．

$$\text{クォーク：}\quad q_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} u_{\mathrm{L}} \\ d_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \qquad q_{\mathrm{R}} = u_{\mathrm{R}},\ d_{\mathrm{R}} \tag{6.2}$$

ここで一つの問題が生じる．ニュートリノを除いて電子もクォークも質量をもつが，ラグランジアンの質量項 $m\bar{\psi}\psi$ はゲージ対称性を破るのである．実際，式（4.79）より

$$\bar{\psi}\psi = \psi_{\mathrm{R}}{}^{\dagger}\psi_{\mathrm{L}} + \psi_{\mathrm{L}}{}^{\dagger}\psi_{\mathrm{R}} \tag{6.3}$$

であるから $\bar{\psi}\psi$ には L の 2 重項と R の 1 重項の異なる表現が混合して入っておりSU(2) 不変とはならない．くり返して述べるが，対称性が相互作用を決定するという精神から，対称性を優先して質量はゼロとしなければならない．では対称性を破らずに現実の質量を導出するにはどうすればよいか．これについては次章で述べる（これが実際可能となることがゲージ理論

の得意満面とするところである)．いずれにしてもこの章ではクォークおよびレプトンの質量はゼロとしておく．したがって自由場のラグランジアンは一般にクォークおよびレプトンの波動関数を ψ_f とおいて

$$\mathcal{L} = \sum_{f=q,l} \bar{\psi}_f i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_f \tag{6.4}$$

となる．相互作用を議論するにはこれで十分である．

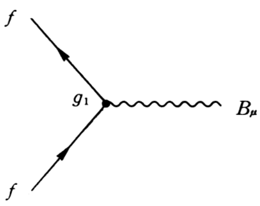
6.2 ゲ ー ジ 場

6.2.1 U(1) 対称性

式 (6.4) のラグランジアンは大域的位相変換 $\psi_f \to e^{-i\alpha}\psi_f$ の下で不変である．これから電荷の保存が出ることはすでに見た．これを局所位相変換不変性に変え，U(1) 対称にする．

$$\mathrm{U(1)}: \quad e^{-ig_1\theta(x)\cdot Y/2} \tag{6.5}$$

ここで現れた“電荷”演算子にあたる量を Y と書き，これを(弱い) **ハイパーチャージ**とよぶ．また，これに対応するゲージ場を B^μ と書き，B^μ と物質場の相互作用の強さを表す結合定数を g_1 とする (図 6.1(a))．この限りではまだ電磁相互作用について何もいっていないことに注意．形の上で電磁相互作用の場合の例にならっているだけである．また，対称性が U(1) だから B^μ はアーベリアンである．



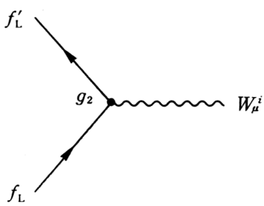


図 6.1　ゲージ場と相互作用

6.2.2　SU(2) 対称性

3.6.3項で述べた弱い相互作用のゲージ理論にそのままならって，SU(2) ゲージ変換とゲージ場 $W_\mu{}^i$ $(i=1,2,3)$ を導入する．

$$\mathrm{SU(2)}:\quad e^{-ig_2\boldsymbol{\alpha}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}/2} \tag{6.6}$$

ゲージ場 $W_\mu{}^i$ と物質場の結合定数を g_2 とする（図6.1(b)）．さらに $W_\mu{}^i$ を組み合せて

$$W_\mu{}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu{}^1 \pm iW_\mu{}^2), \qquad W_\mu{}^0 = W_\mu{}^3 \tag{6.7}$$

と書くことにする．B_μ と異なり $W_\mu{}^i$ は非アーベリアンである．

共変微分 D_μ はしたがって

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_1\frac{Y}{2}B_\mu - ig_2\frac{\tau^i}{2}W_\mu{}^i \tag{6.8}$$

と書ける．

6.3　粒子とゲージ場の相互作用

式 (6.4) の自由ラグランジアンは $\partial_\mu \to D_\mu$ のおき換えによって

$$\mathscr{L} = \sum_f \bar{\psi}_f\, i\gamma^\mu D_\mu \psi_f \tag{6.9}$$

となる．D_μ に対して式 (6.8) の第2項以下を用いて相互作用項を取り出す．話を具体的にするためにレプトンの部分に限ると

(a)　U(1)項

$$\bar{L}i\gamma^\mu\left(-ig_1\frac{Y_\mathrm{L}}{2}B_\mu\right)L + \bar{e}_\mathrm{R}i\gamma^\mu\left(-ig_1\frac{Y_\mathrm{R}}{2}B_\mu\right)e_\mathrm{R}$$

$$= \frac{g_1}{2}[\,Y_\mathrm{L}(\bar{\nu}_\mathrm{L}\gamma^\mu\nu_\mathrm{L} + \bar{e}_\mathrm{L}\gamma^\mu e_\mathrm{L}) + Y_\mathrm{R}\bar{e}_\mathrm{R}\gamma^\mu e_\mathrm{R}]B_\mu \tag{6.10}$$

ここで ψ_L と ψ_R のハイパーチャージをそれぞれ Y_L, Y_R とし，また，式 (6.1) を用いている．e_L は左巻き電子のスピノール，他も同様である．

(b) SU(2)項

$$
\begin{aligned}
&\bar{L} i\gamma^\mu\left(-ig_2\frac{\tau^i}{2}W_\mu{}^i\right)L \\
&\quad=\frac{g_2}{2}(\bar{\nu}_\mathrm{L},\ \bar{e}_\mathrm{L})\,\gamma^\mu\begin{pmatrix} W_\mu{}^0 & -\sqrt{2}\,W_\mu{}^+ \\ -\sqrt{2}\,W_\mu{}^- & -W_\mu{}^0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_\mathrm{L}\\ e_\mathrm{L}\end{pmatrix} \\
&\quad=\frac{g_2}{2}\left[(\bar{\nu}_\mathrm{L}\gamma^\mu\nu_\mathrm{L}-\bar{e}_\mathrm{L}\gamma^\mu e_\mathrm{L})\,W_\mu{}^0-\sqrt{2}\,\bar{\nu}_\mathrm{L}\gamma^\mu e_\mathrm{L}\,W_\mu{}^+\right. \\
&\qquad\left.-\sqrt{2}\,\bar{e}_\mathrm{L}\gamma^\mu\nu_\mathrm{L}\,W_\mu{}^-\right]
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

式(6.10)と式(6.11)から $W_\mu{}^\pm$ 以外の項をまとめると

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{g_1}{2}Y_\mathrm{L}B_\mu+\frac{g_2}{2}W_\mu{}^0\right)\bar{\nu}_\mathrm{L}\gamma^\mu\nu_\mathrm{L}+\left(\frac{g_1}{2}Y_\mathrm{L}B_\mu-\frac{g_2}{2}W_\mu{}^0\right)\bar{e}_\mathrm{L}\gamma^\mu e_\mathrm{L} \\
&\qquad+\frac{g_1}{2}Y_\mathrm{R}B_\mu\bar{e}_\mathrm{R}\gamma^\mu e_\mathrm{R}
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

式 (6.12) において第1項は ν のみによっている．ν は電気的に中性で電磁相互作用には寄与しないから電磁場 A_μ はこの第1項に直交しなければならない．したがって

$$
Z_\mu=\frac{1}{\sqrt{g_2{}^2+g_1{}^2Y_\mathrm{L}{}^2}}(g_1Y_\mathrm{L}B_\mu+g_2W_\mu{}^0) \tag{6.13}
$$

とおいて

$$
A_\mu=\frac{1}{\sqrt{g_2{}^2+g_1{}^2Y_\mathrm{L}{}^2}}(g_2B_\mu-g_1Y_\mathrm{L}W_\mu{}^0) \tag{6.14}
$$

である．式(6.13)と式(6.14)を用いて式(6.12)は

$$
\begin{aligned}
&\frac{g_1g_2}{\sqrt{g_2{}^2+g_1{}^2Y_\mathrm{L}{}^2}}\left(Y_\mathrm{L}\bar{e}_\mathrm{L}\gamma^\mu e_\mathrm{L}+\frac{1}{2}Y_\mathrm{R}\bar{e}_\mathrm{R}\gamma^\mu e_\mathrm{R}\right)A_\mu \\
&\qquad+\frac{1}{2\sqrt{g_2{}^2+g_1{}^2Y_\mathrm{L}{}^2}}\left[(g_1{}^2Y_\mathrm{L}{}^2-g_2{}^2)\,\bar{e}_\mathrm{L}\gamma^\mu e_\mathrm{L}+g_1{}^2Y_\mathrm{L}Y_\mathrm{R}\bar{e}_\mathrm{R}\gamma^\mu e_\mathrm{R}\right. \\
&\qquad\left.+(g_2{}^2+g_1{}^2Y_\mathrm{L}{}^2)\,\bar{\nu}_\mathrm{L}\gamma^\mu\nu_\mathrm{L}\right]Z_\mu
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

となる．

ディラック場と電磁場の相互作用を記述するラグランジアンは3.5節の複素スカラー場の場合と同様に

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}=\bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)\,\psi=\mathcal{L}_\mathrm{free}+ej^{\mu(\mathrm{em})}A_\mu \\
&j^{\mu(\mathrm{em})}=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

となるから相互作用項は

$$ej^{\mu(\mathrm{em})}A_\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{6.17}$$

である．特に電子に対しては電子電荷を $-e$ として（$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_\mathrm{L}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L} + \bar{\psi}_\mathrm{R}\gamma^\mu\psi_\mathrm{R}$ に注意），

$$-e(\bar{e}_\mathrm{L}\gamma^\mu e_\mathrm{L} + \bar{e}_\mathrm{R}\gamma^\mu e_\mathrm{R})A_\mu \tag{6.18}$$

となる．式(6.18)と式(6.15)の第1項を比較して

$$\frac{g_1 g_2 Y_\mathrm{L}}{\sqrt{g_2{}^2 + g_1{}^2 Y_\mathrm{L}{}^2}} = -e, \qquad \frac{1}{2}Y_\mathrm{R} = Y_\mathrm{L} \tag{6.19}$$

でなければならない．$Y_\mathrm{L} = -1$ と選ぶと $Y_\mathrm{R} = -2$，かつ，

$$\frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2}} = e \tag{6.20}$$

である．したがって式（6.15）は書き直されて

$$\begin{aligned}&-e(\bar{e}_\mathrm{L}\gamma^\mu e_\mathrm{L} + \bar{e}_\mathrm{R}\gamma^\mu e_\mathrm{R})A_\mu \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2}}[(g_1{}^2 - g_2{}^2)\bar{e}_\mathrm{L}\gamma^\mu e_\mathrm{L} + 2g_1{}^2\bar{e}_\mathrm{R}\gamma^\mu e_\mathrm{R} \\ &\quad + (g_1{}^2 + g_2{}^2)\bar{\nu}_\mathrm{L}\gamma^\mu\nu_\mathrm{L}]Z_\mu\end{aligned} \tag{6.21}$$

となる．ここで θ_W を

$$\sin\theta_\mathrm{W} = \frac{g_1}{\sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2}}, \qquad \cos\theta_\mathrm{W} = \frac{g_2}{\sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2}} \tag{6.22}$$

によって定義する．逆に解くと

$$g_1 = \frac{e}{\cos\theta_\mathrm{W}}, \qquad g_2 = \frac{e}{\sin\theta_\mathrm{W}}, \qquad \sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2} = \frac{e}{\sin\theta_\mathrm{W}\cos\theta_\mathrm{W}} \tag{6.23}$$

である．θ_W を**ワインバーグ角**とよぶ．式（6.21）の第2項はこれらを用いて

$$\begin{aligned}&\frac{e}{\sin\theta_\mathrm{W}\cos\theta_\mathrm{W}}\left[\left(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_\mathrm{W}\right)\bar{e}_\mathrm{L}\gamma^\mu e_\mathrm{L} + \sin^2\theta_\mathrm{W}\bar{e}_\mathrm{R}\gamma^\mu e_\mathrm{R}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\bar{\nu}_\mathrm{L}\gamma^\mu\nu_\mathrm{L}\right]Z_\mu\end{aligned} \tag{6.24}$$

となる．式(6.1)の2重項 L に対して核力のアイソスピン（式(3.77)）にならって**弱いアイソスピン**（I, I_3）と電荷 Qe を $Q = I_3 + Y/2$ によって定義する（式(3.83)参照）．

$$I = \frac{1}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad I = 0$$

$$L = \begin{pmatrix} \nu_\mathrm{L} \\ e^- \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{cases} +\dfrac{1}{2} & (Q=0) \\ -\dfrac{1}{2} & (Q=-1) \end{cases} \qquad\qquad e_\mathrm{R} \ (Q=-1) \tag{6.25}$$

これを用いて式（6.24）は $\psi_f = \nu_\mathrm{L}, e_\mathrm{L}, e_\mathrm{R}$ に対して統一的に

$$\frac{e}{\sin\theta_\mathrm{W}\cos\theta_\mathrm{W}}\bar{\psi}_f\gamma^\mu(I_3 - Q\sin^2\theta_\mathrm{W})\psi_f Z_\mu \equiv J^{\mu(0)}Z_\mu \tag{6.26}$$

と書くことができる．式(6.26)の $J^{\mu(0)}$ を**中性カレント**とよぶ．

結局 $W_\mu{}^\pm$ を含まない荷電中性の（電荷の移動を含まない）相互作用は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mathrm{int}^\mathrm{(neutral)} &= J_\mu{}^\mathrm{(em)}A^\mu + J_\mu{}^{(0)}Z^\mu \\ J_\mu{}^\mathrm{(em)} &= e\sum_{f=q,l} Q_f\,\bar{\psi}_f\gamma_\mu\psi_f \\ J_\mu{}^{(0)} &= \frac{e}{\sin\theta_\mathrm{W}\cos\theta_\mathrm{W}}\sum_{f=q,l}\bar{\psi}_f\gamma_\mu(I_3 - Q_f\sin^2\theta_\mathrm{W})\psi_f \end{aligned} \tag{6.27}$$

となる．式(6.27)は第2，第3世代も含めたすべてのクォークおよびレプトンに適用される．$J_\mu{}^\mathrm{(em)}$ は電磁カレント，$J_\mu{}^{(0)}$ は中性カレントである．これらはネーター・カレントであるから保存カレントでもある．A^μ は電磁カレントに対応するゲージ場すなわち電磁場であり，量子化によってフォトンとなる．一方，Z^μ は中性カレントと結合するゲージ場であり，これを量子化して **Z ボソン**を得る．

まったく同様に $W_\mu{}^\pm$ を含む項は式（6.11）より

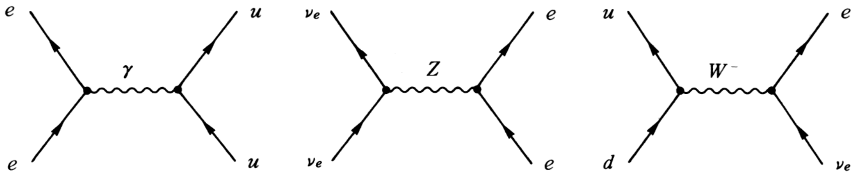
$$-\frac{g_2}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_\mathrm{L}\gamma^\mu e_\mathrm{L} W_\mu{}^+ + \bar{e}_\mathrm{L}\gamma^\mu\nu_\mathrm{L}W_\mu{}^-) \tag{6.28}$$

である．これを一般化して荷電相互作用（電荷の移動を伴う相互作用）は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mathrm{int}^\mathrm{(charged)} &= J_\mu{}^{(+)}W^{\mu(+)} + J_\mu{}^{(-)}W^{\mu(-)} \\ J_\mu{}^{(+)} &= \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_\mathrm{W}}\sum_{f=q_\mathrm{L},l_\mathrm{L}} Q_f\,\bar{\psi}_{f\mathrm{d}}\gamma^\mu\psi_{f\mathrm{u}} \\ J_\mu{}^{(-)} &= J_\mu{}^{(+)\dagger} \end{aligned} \tag{6.29}$$

と書ける．$J_\mu^{(\pm)}$ を**荷電カレント**とよぶ．ここで $\psi_{f\mathrm{u}}, \psi_{f\mathrm{d}}$ はそれぞれ各世代の 2 重項の上成分（up）と下成分（down）を意味する．荷電相互作用を媒介するゲージ場は量子化によって W^+ と W^- の 2 種類の **W ボソン**によって記述することができる．

このようにして電磁相互作用と弱い相互作用は統一的に扱うことができることがわかった．ここで述べたモデルを**ワインバーグ-サラム・モデル**とよぶ．相互作用の具体的な例を図 6.2 に示す．



（a）　e^-u 散乱　　（b）　中性カレント　　（c）　β 崩壊

図 6.2　弱・電磁相互作用の例

最後に二つ注意を与えておく．

(1)　荷電カレント（6.29）には左巻きのフェルミオンのみが寄与する．このとき式（4.68）を用いて

$$\bar{\psi}_\mathrm{L}\gamma^\mu\psi_\mathrm{L} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi = \frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi) \qquad (6.30)$$

であるが，4.4.3 項で述べたようにこれは $V-A$ の形をしている．したがって荷電相互作用は **$V-A$ 相互作用**ともよばれる．

(2)　式（6.28）の弱い相互作用の結合定数 $-g_2/\sqrt{2}$ は式（6.23）より，$\sin\theta_\mathrm{W}$ を除いて電磁相互作用の強さ e と変らない（後に見るように実験的に決められたワインバーグ角の値は $\sin^2\theta_\mathrm{W} \fallingdotseq 0.23$ である）．したがって弱い相互作用は「ちっとも弱くない」のである．しかしここで見落してはならないことがある．荷電相互作用を媒介する W ボソンの質量は，これも後に見るように $m_W \fallingdotseq 80\,\mathrm{GeV}$ であり，$m_W{}^2$ がプロパゲーターに入ってくる．したがって W 交換の $e\nu_e$ 散乱（図 6.3(a)）は低エネルギーの

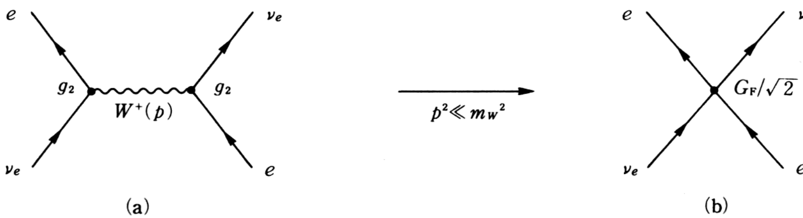


図 6.3 低エネルギーにおける四体フェルミ相互作用

近似で（式(6.30)の 1/2 を考慮して）相互作用の強さが

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{g_2}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{1}{p^2-m_W{}^2} \underset{p^2 \ll m_W{}^2}{\sim} \frac{g_2{}^2}{8m_W{}^2}=\frac{e^2}{8m_W{}^2\sin\theta_W}$$
$$\equiv \frac{G_F}{\sqrt{2}} \tag{6.31}$$

となる．右辺の G_F は低エネルギーにおける弱い相互作用の有効結合定数で，**フェルミ定数**とよばれる（図 6.3(b)）．m_W と $\sin\theta_W$ の数値を代入すると $G_F = 1.17 \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$ であり，弱い相互作用は少なくとも低エネルギーではたしかに「弱い」ことがわかる．図 6.3(b) のような低エネルギーにおける弱い相互作用を記述する現象論的なモデルを**四体フェルミ相互作用**とよぶ．

7 ヒッグス機構

7.1 自発的対称性の破れ

ゲージ理論ではラグランジアンに最初から質量を入れておくとゲージ不変性を破ってしまうため，物質粒子も媒介粒子もその質量をゼロにとっておかなければならないことを先に見た（5.2節および6.1節）．このままでは現実の素粒子を記述する理論にはならない．なんとかしてゲージ不変性を破ることなく，かつ最終的に観測に一致する質量を導きたい．それを実現するのがこの章で学ぶヒッグス機構である．

自己相互作用をする中性スカラー場として次のラグランジアンをとる．

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \tag{7.1}$$

式 (7.1) において $\mu^2>0$ とすると，これは質量 μ のスカラー場が四体相互作用をしている理論となっている．実際，式 (7.1) からオイラー方程式を作ると

$$(\Box + \mu^2)\phi = -\lambda\phi^3 \tag{7.2}$$

となるが，これは ϕ^3 を source とする質量 μ のスカラー場 ϕ に対するクライン-ゴルドン方程式であり，式 (7.1) の最後の項は ϕ^4 相互作用を表している（図 7.1）．式(7.1)は $\phi \to -\phi$ の

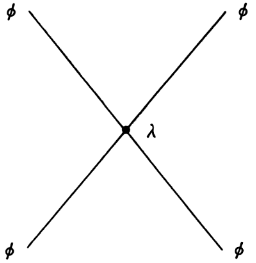


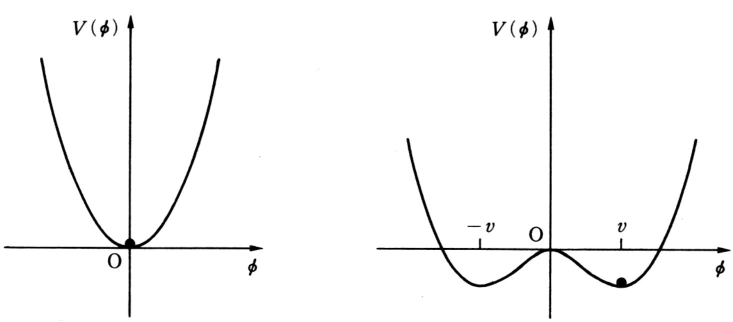
図 7.1　スカラー場の ϕ^4 相互作用

変換に対して不変（対称）であることに注意しよう．また，真空，すなわち基底状態は $\phi=0$ のときであることは明らかであろう．実際質量項も含めたポテンシャル $V(\phi)$ を次式で定義すると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \\
V(\phi) &= \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

$\mu^2>0$ のとき $V(\phi)$ は図 7.2(a) の形をしており，ポテンシャルの極小値（＝最小値）は $\phi=0$ のときである．$V(\phi)$ を**ヒッグス・ポテンシャル**とよぶ．

$\mu^2<0$ のときはどうなるか．この場合 μ^2 はもはや質量とはよ



(a)　$\mu^2>0$　　(b)　$\mu^2<0$

図 7.2　ヒッグス・ポテンシャルと真空

べず，単にポテンシャルの形を決めるパラメータであり，式(7.3) は質量ゼロのスカラー場がポテンシャル $V(\phi)$ の下で相互作用をする理論になっている．このときポテンシャルの形は図 7.2(b) のようになる．V の極値を決める式は

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2+\lambda\phi^2) = 0 \tag{7.4}$$

であるが，この場合 $\phi=0$ は極大値を与え，極小値は

$$\phi = \pm\sqrt{-\mu^2/\lambda} \equiv \pm v \tag{7.5}$$

のときである．ポテンシャルの極小値，すなわち真空を与える ϕ は $+v$ と $-v$ の二つあり，どちらを真空に選んでもかまわないので，例えば $+v$ に選ぼう．真空を添字 0 で表すことにすると $\langle\phi\rangle_0=v$ である．これを**真空期待値**とよぶことにする．

ϕ の真空からのずれを η で表す．

$$\phi(x) = v+\eta(x) \tag{7.6}$$

$\eta(x)$ は真空からどれだけ励起するかを表す物理的な場である．式(7.6)を式(7.3)に代入すると

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta-\frac{1}{2}(-2\mu^2)\eta^2-\left[\frac{1}{3}(3\lambda v)\eta^3+\frac{1}{4}\lambda\eta^4\right] + \text{定数} \tag{7.7}$$

となる．式 (7.7) は質量が $\sqrt{-2\mu^2}=\sqrt{2\lambda v^2}$ のスカラー場が η^3 および η^4 の自己相互作用をしている理論になっている（図 7.3)．

式 (7.7) は η^3 の項があるため，$\eta\to-\eta$ の変換に対して不変

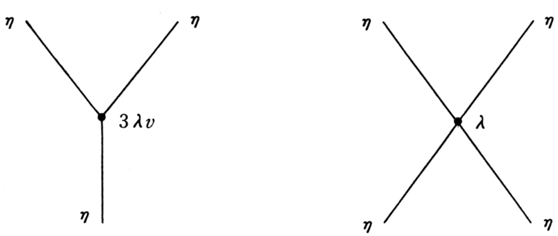


図 7.3　η 場の自己相互作用

ではない．新たに真空を定義し直したためにもとの対称性が破れ，その結果質量 $\sqrt{-2\mu^2}$ が現れたことになる．これを**自発的対称性の破れ**とよぶ．

注意すべきことは，自発的対称性の破れにおいて，対称性を破る項を外から加えたりする操作は一切していないことである．単に真空を定義し直したために元の対称性が隠されて外に現れないだけのことであり，その意味でこれを S. Coleman に従って“隠された対称性”とよぶ方が正しい．このような対称性の“破れ”を「真空が対称性を破る」という言葉で表現する．

7.2　大域的対称性

複素スカラー場に対する次の形のラグランジアンをとる．

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - V(\phi) \\ V(\phi) &= \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \end{aligned} \tag{7.8}$$

式 (7.8) は大域的位相変換

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{-i\chi}\phi(x) \qquad (\chi \text{ は定数}) \tag{7.9}$$

の下で不変である．

$\mu^2>0$ のときは式 (7.8) は前と同様に質量 μ の複素スカラー場の理論であり，真空は $\langle\phi\rangle_0=0$ である．$\mu^2<0$ の場合を考えよう．複素場 ϕ を二つの実場 ϕ_1, ϕ_2 で表すと，

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ V(\phi_1, \phi_2) &= \frac{1}{2}\mu^2({\phi_1}^2 + {\phi_2}^2) + \frac{\lambda}{4}({\phi_1}^2 + {\phi_2}^2)^2 \end{aligned} \tag{7.10}$$

となるが，$\mu^2<0$ の場合に V を図示すると図 7.4 のようなワインボトル形になり，V の極小値を与えるのは

$${\phi_1}^2 + {\phi_2}^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda} \equiv v^2 \tag{7.11}$$

のときである．この場合，真空はびんの底の円周に沿って連続無限個あることに注意．

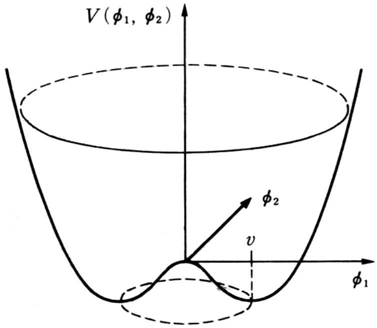


図 7.4 複素スカラー場のヒッグス・ポテンシャル

真空として特に $\phi_1=v$, $\phi_2=0$ を選び，真空からのずれを η, ρ で表す．

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v+\eta(x)+i\rho(x)] \tag{7.12}$$

式(7.12)を式(7.8)に代入すると

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho+\frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta-\frac{1}{2}(-2\mu^2)\eta^2 - \lambda v(\eta\rho^2+\eta^3)-\frac{\lambda}{2}\eta^2\rho^2-\frac{\lambda}{4}\eta^4-\frac{\lambda}{4}\rho^4+\text{定数} \tag{7.13}$$

が得られる．式(7.13)から次のことがわかる．

η 場は質量 $\sqrt{-2\mu^2}=\sqrt{2\lambda v^2}$ をもち，ρ 場は質量ゼロである．第 4 項以下はこの η と ρ の相互作用を記述する．また，最初にもっていた位相変換不変性は自発的に破れている．一般に連続な対称性が自発的に破れると質量ゼロのスカラー場が現れる．これを**ゴールドストン・ボソン**とよぶ．

これを一般に証明しておこう[1]．

スカラー場 $\phi=\{\phi_i\}(i=1, \cdots\cdots, n)$ に対してラグランジアン

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i-V(\phi_i) \tag{7.14}$$

をとる．ϕ_i は実スカラー場である（複素スカラー場は実スカラー場を組み合せて作ることができるから，これで一般性を失わない）．$V(\phi_i)$ は群 G（生成元 $T^a(a=1, \cdots\cdots, N)$）の下で不変

とする。

$$V(G\phi_i) = V(\phi_i) \tag{7.15}$$

ここで $G\phi_i$ は G に具体的な表現をとって定義しておく。式 (7.15) は微小変換をとって書き換えると $G=e^{-i\lambda_a T^a}=1-i\lambda_a T^a$ を用いて

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} T^a{}_{ij}\phi_j = 0 \tag{7.16}$$

$V(\phi_i)$ の極小値を与える ϕ_i がゼロでなければ対称性が自発的に破れ，新しい真空は

$$\langle\phi_i\rangle_0 = v_i \neq 0, \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial \phi_i}\right|_{\phi_i=v_i} = 0 \tag{7.17}$$

となる。ここでこの新しい真空がまだ対称性の群をもっている（つまり元の対称性が完全に破れず，いくらかの対称性が最後まで残っている）としよう。その対称性の群を H(生成元 $t^b(b=1,\cdots\cdots,M)$) とする。H は G の部分群である。したがって t^b は $T^b(b=1,\cdots\cdots,M)$ に等しくとることができる。真空は H の下で不変だから

$$\begin{aligned} T^a{}_{ij}v_j &= 0 \qquad (a = 1,\cdots\cdots,M) \\ T^a{}_{ij}v_j &\neq 0 \qquad (a = M+1,\cdots\cdots,N) \end{aligned} \tag{7.18}$$

である。$\phi_i=v_i+\phi_i'$ とおいて $\mathscr{L}$ を ϕ_i' で表すと

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i'\partial^\mu\phi_i' - \frac{1}{2}\mu_{ij}{}^2\phi_i'\phi_j' + \text{相互作用項} \tag{7.19}$$

となる。ここで

$$\mu_{ij}{}^2 = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right|_{\phi_i=v_i} \tag{7.20}$$

は ϕ_i' の質量（行列）である。

式 (7.16) を ϕ_k で微分し，$\phi_k=v_k$ とおくと式 (7.17) および式 (7.20) を用いて

$$\mu_{ki}{}^2 T^a{}_{ij}v_j = 0 \tag{7.21}$$

を得る。式 (7.18) と式 (7.21) から $a=1,\cdots\cdots,M$ に対しては $\mu^2\neq 0$（μ_{ij} を適当に対角化している），残りの $a=M+1,\cdots\cdots,N$ に対して $\mu^2=0$ を得る。すなわち，対称性を破った分だけゴ

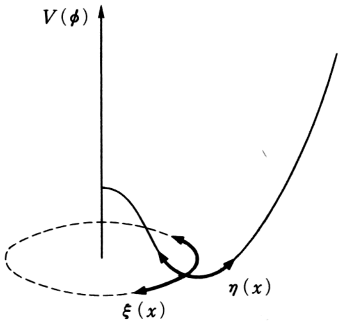


図 7.5 場 $\eta(x)$ と場 $\xi(x)$

ールドストン・ボソンが現れ，残った対称性については（一般に）有限の質量をもつことになる．

物理的になぜゴールドストン・ボソンが現れるのかを見るには次のように考えるとわかりやすい．式（7.12）の代りに

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v+\eta(x)]e^{i\xi(x)/v} \tag{7.22}$$

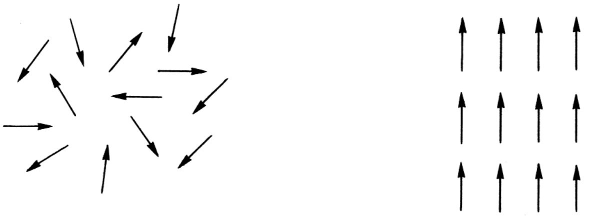
とおくと $\eta(x)$ は ϕ の動径方向の真空からのずれ，$\xi(x)$ はそれと垂直方向の回転方向のずれの場を表している（図 7.5）．図から明らかなように $\eta(x)$ はポテンシャルの山を登らねばならず，正の質量をもつ．それに対して $\xi(x)$ は真空の谷底に沿ってのずれであるからゼロエネルギーで励起できる．すなわち質量がゼロである（質量とは慣性の大きさ，つまり運動状態の変えにくさのことである）．

式（7.8）のようなポテンシャルの形

$$V(\phi) = a|\phi|^2+b|\phi|^4 \tag{7.23}$$

は素粒子に限らず，広く一般に物理に応用される．温度を T として $a=a_0(T^2-T_c^2)$ とする．また，ϕ の真空期待値を $\langle\phi\rangle_0 \equiv K$ と書くことにすると，上に見たように $T>T_c$ のとき対称性が保たれ，そのとき $K=0$．$T<T_c$ のとき対称性が自発的に破れて $K\neq 0$ となる．一般にこのような K をオーダーパラメータとよぶ．また，T_c を臨界温度とよぶ．

例えば磁性体を考える．温度が十分高いときは熱振動のため



(a)　$T > T_c$ $(M=0)$　　　(b)　$T < T_c$ $(M \neq 0)$

図 7.6　磁性体の相転移

に電子のスピンは勝手な方向を向き，3 次元回転対称性が保たれる（常磁性）．温度がキュリー温度 T_c 以下になると**相転移**が起こり，電子のスピンは 1 方向にそろって 3 次元対称性が破れる（強磁性）．この場合のオーダーパラメータは磁化 M である(図 7.6)．同様に常伝導 ↔ 超伝導の相転移の場合，オーダーパラメータはクーパー対の数に対応する．

ゴールドストン・ボソンの存在は困難を引き起こす．その質量はゼロであるからこれは遠距離力となる．重力および電磁気力以外に新たな遠距離力の存在を認めねばならないが，現実にはこのような力は存在しない．したがってなんらかの方法でこれを理論の中から消さねばならない．これが次に述べるヒッグス機構である．

7.3　局所ゲージ不変性（アーベリアン）

7.2 節で見た大域的位相変換不変性を局所位相変換不変性に変える．複素スカラー場に対するラグランジアンとして

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \tag{7.24}$$

をとる．これまで何度も見てきたようにゲージ場 A_μ を導入し，ゲージ変換 U(1),

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = e^{-ig\chi(x)}\phi(x) \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A_\mu'(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x) \end{aligned} \tag{7.25}$$

の下で不変なラグランジアンは，共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ を用

いて

$$\mathscr{L} = (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - \mu^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (7.26)$$

である．

再び $\mu^2<0$ の場合をとって $\sqrt{-\mu^2/2\lambda}=v/\sqrt{2}$ とおくと，ϕ の真空期待値は $\langle\phi\rangle_0=v/\sqrt{2}$ となる．ϕ をこの真空のまわりに展開し，

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v+H(x)] \qquad (H(x)\text{ はスカラー場}) \quad (7.27)$$

とおく．実際，$\phi(x)$ は一般に実場 ρ, ξ を用いて，$\rho(x)e^{i\xi(x)}$ と書けるが，ゲージ変換（7.25）によって $\xi(x)$ を消すことができる．式(7.27)を式(7.26)に代入すると（定数項を無視して）

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)H^2 + \frac{1}{2}(gv)^2 A_\mu A^\mu \\ &- \lambda vH^3 - \frac{\lambda}{4}H^4 + g^2vHA_\mu A^\mu + \frac{1}{2}g^2H^2A_\mu A^\mu \\ &- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (7.28)$$

を得る．式（7.28）は質量 $\sqrt{2\lambda v^2}$ のスカラー粒子と質量 gv のベクトル粒子が互いに相互作用をする理論になっており，ゴールドストン・ボソンはどこにも現れない．自由度を見ると初めは複素スカラー場の 2 と質量ゼロのベクトル場の 2（横波）の計 4 であったものが，対称性の自発的破れ（式（7.28）は U(1) 対称性をもっていない）の結果，自由度は実スカラー場の 1 と質量をもったベクトル場の 3 の計 4 で勘定が合っている．すなわちゴールドストン・ボソンの自由度 $\xi(x)$ が質量をもったベクトル場の縦波成分に変身している．

ここで出てきた質量をもったスカラー場 $H(x)$ を**ヒッグス・ボソン**とよぶ．また，このように局所ゲージ不変性の自発的対称性の破れによってベクトル場に質量をもたせるメカニズムを**ヒッグス機構**とよぶ．

7.4　ワインバーグ-サラム・モデル

この章で述べてきたことを6章の弱・電磁相互作用に応用しよう．複素スカラー場としてSU(2) 2重項

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \qquad \phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \qquad \phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4) \tag{7.29}$$

をとる．ϕ の添字+，0 はスカラー場の電荷を表す．

ϕ に対するラグランジアンを

$$\mathcal{L}_\phi = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - V(\phi), \qquad V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \tag{7.30}$$

とする．明らかにこのポテンシャルは

$$\mathrm{U}(1): \quad \phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{-ig_1\theta(x)Y/2}\phi(x) \tag{7.31}$$

および

$$\mathrm{SU}(2): \quad \phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{-ig_2\alpha^i(x)\cdot\tau^i/2}\phi(x) \tag{7.32}$$

の下で不変である．実際，

$$\begin{aligned} \phi^\dagger \phi &= (\phi^{+*}\ \phi^{0*}) \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \phi^{+*}\phi^+ + \phi^{0*}\phi^0 \\ &= \frac{1}{2}(\phi_1{}^2 + \phi_2{}^2 + \phi_3{}^2 + \phi_4{}^2) \end{aligned} \tag{7.33}$$

であるから $V(\phi)$ は4次元回転群O(4)の下で不変である．

$\mu^2 < 0$ の場合に $V(\phi)$ の極小値を与える ϕ は

$$\phi^\dagger \phi = \frac{-\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2} \tag{7.34}$$

を満足するから，真空として

$$\begin{gathered} \langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \langle \phi_1 \rangle_0 = \langle \phi_2 \rangle_0 = \langle \phi_4 \rangle_0 = 0, \qquad \langle \phi_3 \rangle_0 = v \end{gathered} \tag{7.35}$$

を選び，実スカラー場 $H(x)$ を用いて ϕ を真空のまわりに展開する．

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+H(x)\end{pmatrix} \tag{7.36}$$

真空をこのように与えたために元の対称性は破れているが，まだ ϕ_3 のまわりの回転の対称性 U(1) が残っていることに注意しよう．7.2 節で与えた一般論から，対応するゲージ場は質量をもったベクトル場三つと，質量のないベクトル場一つとなる，という予想がつく．実際，式 (7.30) における微分を式 (6.8) の共変微分に変えてゲージ場と ϕ の相互作用項のみを取り出すと

$$(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi):\quad \phi^\dagger\left(-ig_1\frac{Y}{2}B^\mu-ig_2\frac{\tau^i}{2}W^{\mu i}\right)^\dagger \times\left(-ig_1\frac{Y}{2}B_\mu-ig_2\frac{\tau^i}{2}W_\mu{}^i\right)\phi \tag{7.37}$$

である．ハイパーチャージ Y は 1 に等しい．実際，ハイパーチャージを一般に

$$Q=T_3+\frac{Y}{2} \tag{7.38}$$

によって定義すると，いまの場合，

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}$$

にあてはめて $Y=1$ を得る．

ϕ の真空期待値 (7.35) を $Y=1$ とおいた式 (7.37) に代入すると

$$-\frac{1}{8}v^2g_2{}^2[(W_\mu{}^1)^2+(W_\mu{}^2)^2]-\frac{1}{8}v^2[g_1B_\mu-g_2W_\mu{}^3]^2 \tag{7.39}$$

となる．式 (7.39) の第 1 項は式 (6.7) を用いて

$$\left(\frac{1}{2}vg_2\right)^2W_\mu{}^+W^{\mu-} \tag{7.40}$$

を与える．したがって $W_\mu{}^\pm$ は質量 $vg_2/2$ をもつ．

一方，式 (7.39) の第 2 項は式 (6.13) を用いて ($Y_\mathrm{L}=-1$)，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}v\sqrt{g_1{}^2+g_2{}^2}\right)^2Z_\mu Z^\mu \tag{7.41}$$

を与え，Z_μ が質量 $v\sqrt{g_1{}^2+g_2{}^2}/2$ をもつことがわかる．

結果的に電磁場 A_μ の質量項はどこにも現れなかったことに注意．これは式（7.36）の下で述べた一般論からの予想通りである．最初にもっていた対称性 SU(2)×U(1)（記号×は直積を意味する）は自発的対称性の破れの結果，U(1) だけが残り，これが電磁場のゲージ不変性となる（対称性の破れの起こる前と後で U(1) の意味が異なることに注意）．

なお，式(7.40)と式(7.41)から W と Z の質量の比は式(6.22)を用いて

$$M_W/M_Z = \cos\theta_W \tag{7.42}$$

となり，真空期待値 v の値によらずワインバーグ角だけで決まることを注意しておく．M_W と M_Z の現象論については 10.3 節で考察する．

フェルミオンの質量についてはどうか．スカラー場 ϕ とフェルミオン ψ の相互作用は一般に式（3.86）のような湯川相互作用 $\bar{\psi}\psi\phi$ の形で表される．レプトンに対しては

$$\mathscr{L}_{\text{Yukawa}} = g(\bar{L}\phi e_R + \phi^\dagger \bar{e}_R L) \tag{7.43}$$

と書くことができる．実際

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \longrightarrow \bar{L}\phi = \bar{\nu}_{eL}\phi^+ + \bar{e}_L\phi^0 \tag{7.44}$$

は SU(2) 不変であり，これに SU(2) の 1 重項 e_R を掛けて全体で SU(2) 不変である．また $Y_L=-1$, $Y=1$, $Y_R=-2$ より $\bar{L}\phi e_R$ は U(1) 不変であり，全体で SU(2)×U(1) 不変である．式（7.42）の第 2 項はそのエルミート共役である．

式(7.36)を式(7.43)に代入すると

$$\mathscr{L}_{\text{Yukawa}} = \frac{gv}{\sqrt{2}}\,\bar{e}e + \frac{g}{\sqrt{2}}\,\bar{e}eH \tag{7.45}$$

となる．第 1 項から，電子の質量が $m_e=gv/\sqrt{2}$ となる．すなわちフェルミオンに質量をもたせることができた．ニュートリノの質量項が出てこないことに注意．

一方，第 2 項から $g/\sqrt{2}=m_e/v$ が電子とヒッグス場の相互

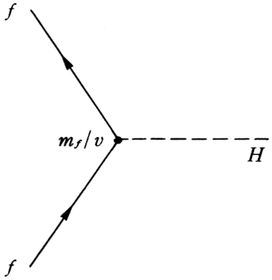


図 7.7 フェルミオンとヒッグス場の相互作用

作用に対する結合定数を与える (図 7.7)．電子に限らず，一般にフェルミオン f とヒッグス場の結合定数がフェルミオンの質量 m_f に比例することがトップクォークおよびヒッグス粒子の発見に大きな影響を与えることを後に見る．

最後に注意を与えておく．以上見てきたようにゲージ理論を現実の現象にあてはめるためにはヒッグス粒子の存在が不可決である．現実は 1995 年現在ヒッグス粒子は発見されていない．ましてやそのポテンシャルの形（例えば式(7.30)）も実際はわからない．その意味で現実のゲージ理論は未知な部分をすべてヒッグス機構に押し込めただけであるといってもよい．実際にヒッグス粒子が見つかり，ポテンシャルの形が式（7.30）のような（実際はもっとずっと複雑でかまわないが）自発的対称性の破れを引き起こすものであり，かつ，その真空期待値が実際の粒子質量を与えるものであって，初めてゲージ理論が完成する．

以上でゲージ理論の定式化を終える．次章からは実際の素粒子反応に対する現象論を展開してゆく．

参考文献

1) Vilenkin, A. and Shellard, E. P. S. : Cosmic Strings and other Topological Defects (Cambridge, 1994).

8　量子電気力学

8.1　ディラック・プロパゲーター

この章ではディラック粒子として具体的に電子をとり，相互作用としては電磁相互作用を考える．電子と電磁場の相互作用を記述する力学が量子電気力学（QED）である．

自由電子のプロパゲーター S_F は方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu'-m)S_F(x'-x) = \delta^4(x'-x) \qquad (\partial_\mu' = \partial/\partial x^{\mu'}) \tag{8.1}$$

を満足する．一方，電磁相互作用も含めた電子の完全プロパゲーターを S_F' とすると共変微分，式 (3.36) を用いて（電子電荷 $-e$ を考慮して）

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu'+ieA_\mu')-m]S_F'(x'-x) = \delta^4(x'-x) \tag{8.2}$$

が成り立つ．

一般にプロパゲーターの方程式を自由粒子の微分演算子 $L(\partial)$ とポテンシャル V に対して

$$\begin{cases} L(\partial)G_0 = \delta \\ [L(\partial)-V]G = \delta \end{cases} \tag{8.3}$$

と書く．このとき $A=L(\partial)$，$B=V$，$G_0=A^{-1}$，$G=(A-B)^{-1}$ とおいて恒等式

$$(A-B)^{-1} = A^{-1}+A^{-1}B(A-B)^{-1} \tag{8.4}$$

に代入すると

$$G = G_0 + G_0 V G \tag{8.5}$$

と形式的に書ける[1]．具体的には

$$G(x', x) = G_0(x', x) + \int d^4x''\, G_0(x', x'')\, V(x'')\, G(x'', x) \tag{8.6}$$

である．これを式 (8.1) と式(8.2) に適用すると，$V = e\not{A}$ とおいて ($\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$)，

$$S_F'(x'-x) = S_F(x'-x) + e\int d^4y\, S_F(x'-y)\not{A}(y)\, S_F'(y-x) \tag{8.7}$$

と書ける．式 (8.7) において e が小さいとすると（実際，式 (1.1) より $e^2/4\pi \ll 1$ である），摂動展開ができて

$$\begin{aligned} S_F'(x'-x) = S_F(x'-x) &+ e\int d^4y\, S_F(x'-y)\not{A}(y)\, S_F(y-x) \\ &+ e^2\int d^4y d^4y'\, S_F(x'-y)\not{A}(y)\, S_F(y-y') \\ &\times \not{A}(y')\, S_F(y'-x) + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{8.8}$$

となる．式 (8.8) を図 8.1 に示す．点 (x, t) から (x', t') まで

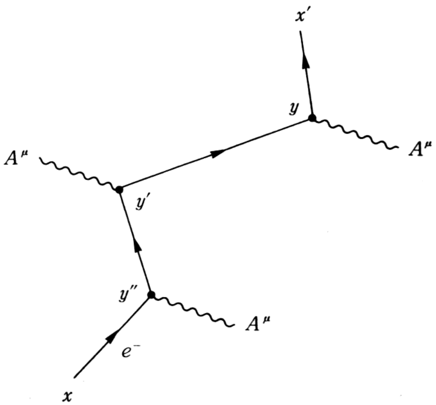


図 8.1　相互作用とプロパゲーター

電子が何度も相互作用を受けながら進む様子を頭に描くことができるであろう．

式 (8.8) より完全プロパゲーターは自由プロパゲーター S_F から直接求めることができる．では自由プロパゲーターはどのような形をとるのだろうか[2)]．

$S_F(x'-x)$ のフーリエ変換を $\tilde{S}_F(p)$ とおくと

$$S_F(x'-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{S}_F(p)\, e^{-ip\cdot(x'-x)} \tag{8.9}$$

であるが，式 (8.1) を用いると

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{1}{\not{p}-m} = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2} \qquad (\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu) \tag{8.10}$$

となる．ここで問題となるのは式 (8.10) の分母の特異点をどう扱うかである．

電子の波動関数は式 (4.83) より

$$u(p)\, e^{-ip\cdot x}, \qquad p^0 = +\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} \equiv E \tag{8.11}$$

であるが，これが $t'>t$ のとき時間軸の正方向に伝播するように選ぶ．そのためには式 (8.10) を書き換えて

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon} \tag{8.12}$$

とすればよい

実際，式 (8.12) を式 (8.9) に代入すると，$t'>t$ のとき図 8.2 における p^0 の積分を下半面で実行して

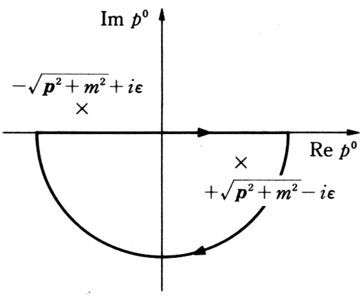


図 8.2 $S_F(p)$ と特異点

$$S_F(x'-x) = \int \frac{dp^0 d^3p}{(2\pi)^4} e^{-ip_0(t'-t)+i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})}$$
$$\times \frac{\gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} + m}{[p^0 - \sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}+i\varepsilon][p^0+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}-i\varepsilon]}$$
$$= -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\gamma^0 E - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m}{2E}$$
$$\times e^{-iE(t'-t)+i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})} \qquad (t'>t) \tag{8.13}$$

となり，正振動数成分 $e^{-ip\cdot x}$ が時間軸の正方向に進むことがわかる．

一方，$t'<t$ のときは積分を上半面で実行し（最後に積分変数を $\boldsymbol{p}$ から $-\boldsymbol{p}$ に変えて），

$$S_F(x'-x) = -i\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-\gamma^0 E + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m}{2E}$$
$$\times e^{+iE(t'-t)-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})} \qquad (t'<t) \tag{8.14}$$

が得られる．式（8.14）は負振動成分 $e^{+ip\cdot x}$ が時間軸の負の向きに進むことを表している．

式（8.14）において指数の肩を $-i(-E)(t'-t)$ と書き直し，式（8.13）と比較すると，$-E$ のエネルギーをもった電子が時間を逆向きに進む，と読むこともできる．図 8.3 (a) においてエネルギー E の電子が点 1 で電磁場と相互作用を行い，フォトンにエネルギー $2E$ を与え，自身は負のエネルギー $-E$ をもって時間軸を逆向きにたどり，点 2 で再び電磁場と相互作用を行う．ここでフォトンからエネルギー $2E$ をもらい，正のエネルギー E をもって x' まで進む．これまで何度も述べたように図 8.3 (a) は図 8.3 (b) に等しい．時間軸の逆向きに点 1 から 2 まで進む電子は時間軸の正の向きに点 2 から 1 に進む陽電子と同値である．したがって負のエネルギーをもって時間軸を逆向きに進む粒子は正のエネルギーをもって時間軸の正方向に進む反粒子に等しい．図 8.3 (b) において電子は点 1 において右からやってきた $+E$ のエネルギーをもつ陽電子と対消滅をしてエネルギー $2E$ のフォトンとなる．一方この陽電子は点 2 においてフォトンから対生成されたものである．式(4.83)の

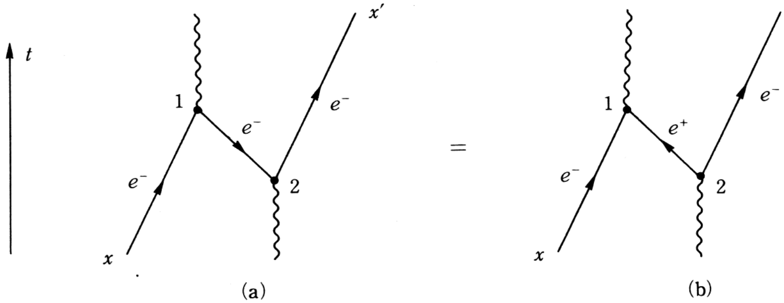


図 8.3 電子および陽電子の伝播

波動関数の負振動数成分 $v(p)e^{+ip\cdot x}$ はこのように解釈される．

式 (8.13) および式 (8.14) の積分の中の指数関数を除いた部分は係数を除いて式 (4.58)，(4.59) で定義した射影演算子そのものである．したがって

$$S_{\mathrm{F}}(x'-x) = -i\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{m}{E}[P_+e^{-ip\cdot(x'-x)}\theta(t'-t) + P_-e^{+ip\cdot(x'-x)}\theta(t-t')] \qquad (p_0=E>0) \tag{8.15}$$

と書くことができる．

式 (4.52) の $u_\alpha(p)$ と $v_\alpha(p)$ を用いて自由場の波動関数を

$$\begin{aligned}\psi_r{}^p(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}u_r(p)e^{-ip\cdot x} \\ \psi_{r+2}{}^p(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E}}v_r(p)e^{+ip\cdot x}\end{aligned} \qquad (r=1,2) \tag{8.16}$$

によって定義すると，式 (8.15) は次のように書ける．

$$S_{\mathrm{F}}(x'-x) = -i\theta(t'-t)\int\mathrm{d}^3p\sum_{r=1,2}\psi_r{}^p(x')\bar{\psi}_r{}^p(x) + i\theta(t-t')\int\mathrm{d}^3p\sum_{r=3,4}\psi_r{}^p(x')\bar{\psi}_r{}^p(x) \tag{8.17}$$

式(8.1)と(8.2)に対応して自由場および相互作用をする場の演算子をそれぞれ $\psi(x)$, $\Psi(x)$ とおくとディラック方程式は

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$
$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m]\Psi(x) = 0 \tag{8.18}$$

となる．プロパゲーターの定義より

$$\psi(x') = \int S_F(x'-x)\psi(x) \tag{8.19}$$

$$\Psi(x') = \int S_F'(x'-x)\Psi(x) \tag{8.20}$$

である．式(8.20)に式(8.7)を代入し，式(8.19)を用いると($\Psi(x) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \psi(x)$ とおいて)

$$\Psi(x') = \psi(x') + e\int d^4y\ S_F(x'-y)\not{A}(y)\Psi(y) \tag{8.21}$$

が得られる．第1項の $\psi(x')$ は相互作用を経験しない「素通り」を意味する．

8.2 S　行　列

ある素粒子反応において初期状態 i から終状態 f への遷移確率を求めよう．相互作用が時空の限られた領域に限定されているとすると，無限の過去には粒子は一つの平面波で表される自由状態 i にあり，相互作用を経験した後に無限の未来には相互作用領域を離れて再び自由状態 f になる．この過程の確率振幅を S_{fi} と書く．S_{fi} を**S行列**と名づける（ドイツ語で散乱をStreuungというが，その頭文字をとったものである．英語でScattering，日本語でSanranである）．

式(8.21)と式(8.17)より散乱波は

$$\Psi(x') \xrightarrow[t'\to+\infty]{} \psi(x') + \int d^3p \sum_{r=1}^{2} \psi_r^p(x')\left[-ie\int d^4y \times \bar{\psi}_r^p(y)\not{A}(y)\Psi(y)\right] \tag{8.22}$$

$$\Psi(x') \xrightarrow[t'\to-\infty]{} \psi(x') + \int d^3p \sum_{r=3}^{4} \psi_r^p(x')\left[+ie\int d^4y \times \bar{\psi}_r^p(y)\not{A}(y)\Psi(y)\right] \tag{8.23}$$

で与えられる．式(8.23)は式(8.14)の下に述べたように始状態での陽電子の波動関数と解釈できる．

S 行列要素 S_{fi} は終状態における $\Psi(x')$ の自由場 $\psi_r^p(x')$ 成分で与えられるから

$$S_{fi} = \delta_{fi} - ie\varepsilon_r \int d^4y\ \bar{\psi}_f(y) A\!\!\!/(y)\, \Psi_i(y) \tag{8.24}$$

となる．ここで $\psi_f(y)$ は終状態 f の自由場波動関数，$\Psi_i(y)$ は始状態 i から点 y まで発展してきた波動関数であり，$\varepsilon_r = +1$ $(r=1, 2)$，および $\varepsilon_r = -1$ $(r=3, 4)$ である．式 (8.24) において第 1 項の δ_{fi} は「素通り」である．

8.3 散乱断面積

物理学者以外の人たちからときどき「素粒子の大きさはどれくらいなのですか」と質問されることがある．実はこの質問に対する答は素粒子論すべてとなる．真暗な蔵の中に未知の怪物が住みついているとしよう．名前をつけると便利だからこれを MUA（Mass Unidentified Agent）とよぼう．MUA の大きさはどれだけか．それを知るためには観測を行わなければならない．何を用いて観測するか．一つには棒で暗闇をかき回してみることである．棒がカチリと何かに当ればそれで大きさがわかる．ぶよぶよぐにゃぐにゃしていればある程度大きさの目安がつく．一方，細い針のようなもので突き刺して見ることもできるが相手が豆腐のようなものであれば手応えがなく，大きさはゼロだと結論してしまう．一番簡単なのは光で照らして見ることである．その結果が図 8.4 であったとする．さて MUA の大きさはいくらか．光で見る，つまり電磁相互作用で見たときと，棒で探るときで MUA の大きさは異なる．もっと具体的に電磁相互作用で陽子を観測すればクーロン力は遠距離力だから陽子は無限大の大きさをもち，中性子は電荷をもたないから大きさゼロである．一方，強い相互作用で見れば陽子も中性子も同じ

大きさをもつ．後に見るように相互作用の強さはエネルギーの関数となるので，どのエネルギーで観測したかによって大きさは異なってくる．図 8.4 を可視光線による結果とすれば，赤外線で見ればまったく違った大きさと形をもってくる可能性がある（天文学における電波銀河を思い出そう）．例えば MUA に「骨」がないとすれば X 線で見た MUA の大きさはゼロである．すなわち大きさ（＝断面積）は当てる電磁波のエネルギーの関数となる．



図 8.4　MUA の大きさはいくらか？

標的の断面積を σ で表すと，上の議論は次のようにまとめることができる，σ はエネルギーの関数であり，かつ相互作用によってまったく違う値をとる．この節ではある相互作用を特定したとき，すなわち探査棒を指定したとき，標的の大きさ σ と反応度（単位時間あたりの散乱事象の数）の観測結果がどのような関係式で結ばれるかを考察する．

断面積 σ の標的が単位立方体の中に一つの割合であるとする．この標的に向かって粒子ビームを当てる．標的は面積 1 の

中の面積 σ を示しているから，1個のビーム粒子が標的に当る確率はちょうど σ に等しい．ビーム粒子の速度を v とすると，単位時間には長さ v の筒の中のビーム粒子が，標的の入っている単位立方体を通過する．したがってビーム粒子の密度を n とすると，単位時間あたりの散乱事象の数は $nv\sigma$ である（図8.5）．nv を入射フラックスとよぶと結局，単位時間あたりの事象数（＝遷移確率）と断面積の関係は

$$\sigma = \frac{1}{\text{入射フラックス}} \times (\text{遷移確率}) \tag{8.25}$$

と表すことができる．式（8.25）で σ がたしかに面積の次元をもっていることは容易に確かめることができる．

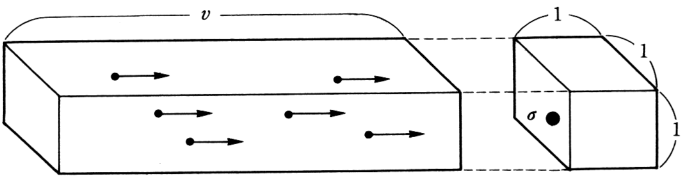


図8.5　散乱断面積と反応度

加速器等の実験で式（8.25）の右辺は直接観測量である．これを理論的に求めた確率振幅と結びつけることによって理論の実証が可能となる．以下では具体的な例をとってこれを示そう．

8.4　電子のクーロン散乱

重い原子核の作る電磁場の下での電子のラザフォード散乱は量子力学でおなじみのものであるが，これを場の量子論の立場から取り扱う．

遷移振幅 S_{fi} は最低次で，式（8.24）より

$$S_{fi} = -ie\int d^4x\, \bar{\psi}_f(x)\, A\!\!\!/(x)\, \psi_i(x) \tag{8.26}$$

式 (8.26) において電子の初期状態 $\psi_f(x)$ と終状態 $\psi_f(x)$ は式 (4.83) から

$$
\begin{aligned}
\psi_i(x) &= \sqrt{\frac{m}{E_i V}}\, u_\alpha(p_i)\, e^{-ip_i\cdot x} \\
\psi_f(x) &= \sqrt{\frac{m}{E_f V}}\, \bar{u}_\beta(p_f)\, e^{+ip_f\cdot x}
\end{aligned}
\tag{8.27}
$$

と書ける．実際図 8.6 において入射電子は相互作用点（これを**バーテックス**とよぶ）で消え（式(4.83)の $\psi(x)$ の第 1 項），改めて散乱電子が生成されて(式(4.83)の $\bar{\psi}(x)$ の第1項)いる．式 (8.27) において V は体積を意味し，電子は体積 V 中に 1 個となるように規格化されているものとする．

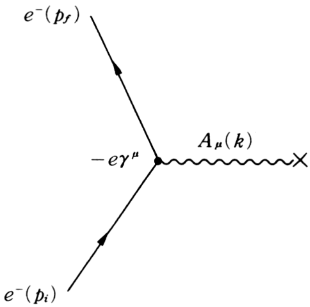


図 8.6　電子のラザフォード散乱

一方，電磁場の方は電荷 Ze の原子核によるクーロン・ポテンシャル

$$
A_0(x) = -\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{x}|}, \qquad \boldsymbol{A}(x) = 0 \tag{8.28}
$$

で表される．

式(8.27)と式(8.28)より，式(8.26)は

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= \frac{iZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{V}\sqrt{\frac{m^2}{E_iE_f}}\,\bar{u}_\beta(p_f)\,\gamma^0 u_\alpha(p_i)\int\frac{\mathrm{d}^4x}{|\boldsymbol{x}|}\,e^{i(p_f-p_i)\cdot x} \\
&= \frac{iZ\alpha}{V}\sqrt{\frac{m^2}{E_iE_f}}\,\bar{u}_\beta(p_f)\,\gamma^0 u_\alpha(p_i)\frac{4\pi}{|\boldsymbol{k}|^2}\cdot 2\pi\delta(E_f-E_i)
\end{aligned}
\tag{8.29}
$$

となる（$\int \mathrm{d}^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}/|\boldsymbol{x}| = 4\pi/|\boldsymbol{k}|^2$ を用いた）．ここで $k=p_f$

$-p_i$ はフォトンの運動量である．また，式 (1.1) の微細構造定数 α を用いている．式 (8.29) の最後のデルタ関数はエネルギー保存則にほかならない．

S_{fi} は確率振幅であるから遷移確率はその絶対値の 2 乗に比例する．ある初期状態を指定したとき，終状態はエネルギー保存則を満足する限り運動量は何であってもかまわないから，その位相体積を掛けて，1 粒子あたりの遷移確率は

$$|S_{fi}|^2\frac{V\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}=\frac{Z^2(4\pi\alpha)^2m^2}{E_iV}\frac{|\bar{u}_\beta(p_f)\gamma^0u_\alpha(p_i)|^2}{|\boldsymbol{k}|^4}\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3E_f}\times[2\pi\delta(E_f-E_i)]^2 \tag{8.30}$$

式 (8.30) においてデルタ関数の 2 乗が現れているが，これは以下のように取り扱う．

$$2\pi\delta(E_f-E_i)=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t\ e^{i(E_f-E_i)t} \tag{8.31}$$

から

$$2\pi\delta(0)=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{d}t=T \tag{8.32}$$

したがって

$$\begin{aligned}[2\pi\delta(E_f-E_i)]^2&=2\pi\delta(0)\cdot 2\pi\delta(E_f-E_i)\\&=T\cdot 2\pi\delta(E_f-E_i)\end{aligned} \tag{8.33}$$

である．T は相互作用にかかった時間と解釈できる．まったく同様に

$$[(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)]^2=VT(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i) \tag{8.34}$$

となるが，これは後の計算に用いられる．

われわれが欲しいのは単位時間あたりの遷移確率 R である．したがって式(8.30)に式(8.33)を代入し，T で割ると

$$R=\frac{4Z^2\alpha^2m^2}{E_iV}\frac{|\bar{u}_\beta(p_f)\gamma^0u_\alpha(p_i)|^2}{|\boldsymbol{k}|^4}\frac{\mathrm{d}^3p_f}{E_f}\delta(E_f-E_i) \tag{8.35}$$

入射フラックス f は $n=V^{-1}$, $v=|\boldsymbol{p}_i|/E_i$ を用いて $f=|\boldsymbol{p}_i|/E_iV$ となるから，式 (8.35) を f で割って立体角 $\mathrm{d}\Omega$ に散乱される**微分断面積**は（$|\boldsymbol{p}_i|=|\boldsymbol{p}_f|$ に注意して）

$$d\sigma = 4Z^2\alpha^2 m^2 \int \frac{|\bar{u}_\beta(p_f)\gamma^0 u_\alpha(p_i)|^2}{|\boldsymbol{k}|^4} \frac{p_f dp_f d\Omega}{E_f} \delta(E_f - E_i) \tag{8.36}$$

となる．$p_f dp_f = E_f dE_f$ を用いると結局，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|\boldsymbol{k}|^4} |\bar{u}_\beta(p_f)\gamma^0 u_\alpha(p_i)|^2 \tag{8.37}$$

が得られた．

道のりはまだまだ遠い．式 (8.37) の絶対値の 2 乗を計算しなければならない．通常の実験では電子のスピン状態の観測は行わない．したがって始状態の電子スピンについては未知であるから平均をとり，終状態スピンについてはあらゆる可能性をすべてとるから和をとる．この場合の微分断面積を $d\bar{\sigma}/d\Omega$ と書いて

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{4Z^2\alpha^2 m^2}{|\boldsymbol{k}|^4} \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} |\bar{u}_\beta(p_f)\gamma^0 u_\alpha(p_i)|^2 \tag{8.38}$$

となる．式 (8.38) のスピン和を計算しよう．

一般に Γ を γ^μ の組合せとして $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ と書くと

$$|\bar{u}(\mathrm{f})\Gamma u(\mathrm{i})|^2 = \bar{u}(\mathrm{f})\Gamma u(\mathrm{i})\bar{u}(\mathrm{i})\bar{\Gamma} u(\mathrm{f}) \tag{8.39}$$

がいえる．

問題　式(8.39)を示せ．

特に $\Gamma = \gamma^0$ のときは $\bar{\Gamma} = \gamma^0$ である（特に断わらない限りは γ^μ に対して常に式 (4.11) の標準表現を用いる．このとき $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ である）．

式 (8.38) の絶対値の 2 乗は式 (8.39) を用いて

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\beta} |\bar{u}_\beta(p_f)\gamma^0 u_\alpha(p_i)|^2 \\
&\qquad = \sum_{\alpha,\beta} [\bar{u}_\beta(p_f)]_\rho (\gamma^0)_{\rho\sigma} [u_\alpha(p_i)]_\sigma \\
&\qquad\qquad \times [\bar{u}_\alpha(p_i)]_\mu (\gamma^0)_{\mu\nu} [u_\beta(p_f)]_\nu \\
&\qquad = \sum_{\alpha,\beta} [\bar{u}_\beta(p_f)]_\nu [\bar{u}_\beta(p_f)]_\rho (\gamma^0)_{\rho\sigma} \\
&\qquad\qquad \times [u_\alpha(p_i)]_\sigma [\bar{u}_\alpha(p_i)]_\mu (\gamma^0)_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\not{p}_f + m}{2m}\right)_{\nu\rho} (\gamma^0)_{\rho\sigma} \left(\frac{\not{p}_i + m}{2m}\right)_{\sigma\mu} (\gamma^0)_{\mu\nu}$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\gamma^0 \frac{\not{p}_f + m}{2m} \gamma^0 \frac{\not{p}_i + m}{2m}\right) \tag{8.40}$$

ここで式 (4.58) を用いた.

式 (8.40) には γ 行列の積に対するトレースが現れている. 一般にトレースは次の定理を用いて計算できる.

(1) 奇数個の $\not{a}$ に対する $\mathrm{T_r}(\not{a}_1 \cdots\cdots \not{a}_n) = 0$.

証明 標準表現における γ^5 を

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって定義すると, $(\gamma^5)^2 = 1, \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) である. これを用いると

$$\mathrm{Tr}(\not{a}_1 \cdots\cdots \not{a}_n) = \mathrm{Tr}(\not{a}_1 \cdots\cdots \not{a}_n \gamma^5 \gamma^5) = \mathrm{Tr}(\gamma^5 \not{a}_1 \cdots\cdots \not{a}_n \gamma^5)$$

となるが最後の式で γ^5 を γ^μ との反交換関係を用いて次々に右へ移動させて

$$\mathrm{Tr}(\not{a}_1 \cdots\cdots \not{a}_n) = (-1)^n \mathrm{Tr}(\not{a}_1 \cdots\cdots \not{a}_n)$$

したがって n が奇数のときゼロとなる.

(2) $\mathrm{Tr}\, 1 = 4$.

4 行 4 列の単位行列に対してこれは明らかであろう.

(3) $\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b$

証明 $\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = \mathrm{Tr}(\not{b}\not{a}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a}) = a \cdot b\ \mathrm{Tr}\, 1 = 4a \cdot b$

ここで式 (4.12) を用いた.

(4) $\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4(a \cdot b\ c \cdot d - a \cdot c\ b \cdot d + a \cdot d\ b \cdot c)$

証明

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= \mathrm{Tr}[(2a \cdot b - \not{b}\not{a})\not{c}\not{d}] \\
&= 8a \cdot b\ c \cdot d - \mathrm{Tr}[\not{b}(2a \cdot c - \not{c}\not{a})\not{d}] \\
&= 8a \cdot b\ c \cdot d - 8a \cdot c\ b \cdot d \\
&\qquad + \mathrm{Tr}[\not{b}\not{c}(2a \cdot d - \not{d}\not{a})] \\
&= 8(a \cdot b\ c \cdot d - a \cdot c\ b \cdot d + a \cdot d\ b \cdot c) \\
&\qquad - \mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d})
\end{aligned}$$

において最後の項を左辺に移項すればよい.

これらのトレースの定理を用いると式 (8.40) は

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^0\frac{\not{p}_f+m}{2m}\gamma^0\frac{\not{p}_i+m}{2m}\right)=\frac{1}{m^2}(2E_fE_i-p_f\cdot p_i+m^2) \tag{8.41}$$

となる．さらに $E_f=E_i=E$，また，散乱角を θ として $\boldsymbol{p}_f\cdot\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}^2\cos\theta=(\beta E)^2\cos\theta$ を用いると，式 (8.41) は $2E^2/m^2[1-\beta^2\sin^2(\theta/2)]$ になる．一方，$|\boldsymbol{k}|^2=4\boldsymbol{p}^2\sin^2(\theta/2)$ と書ける．

問題　式 (8.41) およびそれ以下の計算を確かめよ．

結局，これらを式 (8.38) に代入して最終的にラザフォード散乱の微分断面積は

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{4\boldsymbol{p}^2\beta^2\sin^4(\theta/2)}\left(1-\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{8.42}$$

で与えられる．式 (8.42) は $\beta\to0$ の極限で非相対論におけるラザフォードの公式に一致する．

8.5　電子の対消滅

前節で見たように，単純なラザフォード散乱に対してだけでも計算はたいへん面倒である．γ 行列の計算をゴチゴチ実行することを γ-gymnastics（ガンマ体操！）とよぶが，複雑な過程に対しては上の例の何倍も手間がかかる．しかし訓練を積むにしたがって計算は速くなる．一方，ある与えられた反応に対して遷移確率を計算する手法が確立されている．まず，求める過程に対する図 1.1 のようなダイアグラムを書く．これを**ファインマン図**とよぶ．図が決まるとそれに応じて，図から数式への翻訳の規則にのっとって確率振幅を書き下すことができる．これを**ファインマン則**とよぶ．後はガンマ体操を行えばよい．訓練を積むにしたがって C 難度の床上運動も可能となる．ここではこれらの一般論を導くために，後に重要な役割を果すもう一つ

の例をとって具体的に計算をしてみよう．すなわち $e^-e^+\to\mu^-\mu^+$ 過程である．この過程に対するファイマン図を図 8.7 に示す．

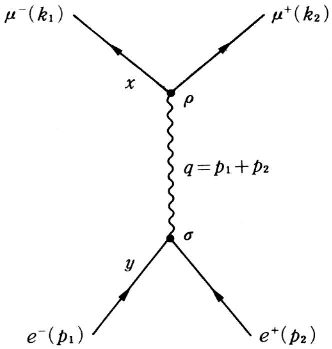


図 8.7 $e^-e^+\to\mu^-\mu^+$ に対するファインマン図

図 8.7 において上のバーテックスに注目する．これは“始状態”の μ^- が右から時間を逆向きに走ってきて電磁場 $A^\rho(x)$ と相互作用をし，終状態の μ^- となって左上方に飛び去る，と読める．式 (8.24) より S_{fi} は

$$S_{fi} = ie\int \mathrm{d}^4x\ \bar{\psi}^{k_1}(x)\,A\!\!\!/(x)\,\psi^{k_2}(x)$$
$$= ie\sqrt{\frac{M^2}{\omega_1\omega_2}}\frac{1}{V}\int \mathrm{d}^4x\ e^{+i(k+k_2)\cdot x}\bar{u}_\mu(k_1)\,\gamma^\rho v_\mu(k_2)\,A_\rho(x) \tag{8.43}$$

と書ける．ここで式 (4.83) を用い，μ の質量を M，μ^- と μ^+ のエネルギーをそれぞれ ω_1，ω_2 と書いた．

一方，この電磁場 $A^\rho(x)$ は下のバーテックスにおける電子を source として x まで伝播してきたものである．source を $J^\rho(x)$ と書いて

$$\Box A^\rho(x) = J^\rho(x) \tag{8.44}$$

であるが，式 (5.20) で与えた電磁場のプロパゲーター D_F を用いて

$$A_\rho(x) = \int \mathrm{d}^4y\ D_\mathrm{F}(x-y)_{\rho\sigma}J^\sigma(y) \tag{8.45}$$

と書ける．式 (8.45) の $J_\sigma(y)$ は下のバーテックスにおける 4 元カレントである．電磁場と電子の相互作用は $J^\sigma A_\sigma$，$J^\sigma = -e\bar{\psi}\gamma^\sigma\psi$ であるから（式(6.27)を参照)，式 (4.83) を用いて

$$J^\sigma(y) = -e\bar{\psi}_i^{p_2}(y)\gamma^\sigma\psi_i^{p_1}(y)$$
$$= -e\sqrt{\frac{m^2}{E_1E_2}}\frac{1}{V}e^{-i(p_1+p_2)\cdot y}\bar{v}_e(p_2)\gamma^\sigma u_e(p_1) \quad (8.46)$$

となる．m は電子質量，E_1 と E_2 はそれぞれ e^- と e^+ のエネルギーである．

式(8.45)，(8.46)を式(8.43)に代入して式(5.20)を用いて積分を実行すると

$$S_{fi} = -ie^2\sqrt{\frac{M^2}{\omega_1\omega_2}}\sqrt{\frac{m^2}{E_1E_2}}\frac{1}{V^2}\int d^4x d^4y\ e^{i(k_1+k_2)\cdot x-i(p_1+p_2)\cdot y}$$
$$\times \bar{u}_\mu(k_1)\gamma^\rho v_\mu(k_2)D_F(x-y)_{\rho\sigma}\bar{v}_e(p_2)\gamma^\sigma u_e(p_1)$$
$$= +\frac{ie^2}{V^2}(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2)\sqrt{\frac{M^2}{\omega_1\omega_2}}\sqrt{\frac{m^2}{E_1E_2}}$$
$$\times[\bar{u}_\mu(k_1)\gamma^\rho v_\mu(k_2)]\frac{1}{q^2+i\varepsilon}[\bar{v}_e(p_2)\gamma_\rho u_e(p_1)]$$
$$(8.47)$$

が得られる．ここで $q=p_1+p_2$ である．式(8.47)のデルタ関数はこの過程に対するエネルギー・運動量保存則にほかならない．

遷移確率は式(8.34)を用いて

$$R = \frac{1}{VT}|S_{fi}|^2$$
$$= (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2)\frac{1}{V^4}\frac{M^2}{\omega_1\omega_2}\frac{m^2}{E_1E_2}|\mathcal{M}_{fi}|^2$$
$$(8.48)$$

ここで**不変振幅** $\mathcal{M}_{fi}$ は次の式で与えられる．

$$\mathcal{M}_{fi} = [\bar{u}_\mu(k_1)\gamma^\rho v_\mu(k_2)]\frac{e^2}{q^2+i\varepsilon}[\bar{v}_e(p_2)\gamma_\rho u_e(p_1)] \quad (8.49)$$

微分断面積は式 (8.48) の遷移確率をフラックスで割り，終状態の位相体積，

$$\frac{V\mathrm{d}^3k_1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{V\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^3} \tag{8.50}$$

を掛け，さらに標的の密度 $1/V$ で割ることによって得られる．

フラックスは始状態での粒子の相対速度を用いて $f=|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|/V$ と書けるが，ここで一般に質量 m_1，m_2 の粒子に対して

$$\frac{m_1m_2}{E_1E_2|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|}=\frac{m_1m_2}{E_1E_2|\boldsymbol{p}_1/E_1-\boldsymbol{p}_2/E_2|}=\frac{m_1m_2}{|\boldsymbol{p}_1E_2-\boldsymbol{p}_2E_1|}$$
$$=\frac{m_1m_2}{\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m_1{}^2m_2{}^2}} \tag{8.51}$$

が成り立つことに注意する．実際，$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ が平行で $(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)^2=\boldsymbol{p}_1{}^2\cdot\boldsymbol{p}_2{}^2$ のとき，

$$\begin{aligned}(p_1\cdot p_2)^2&-m_1{}^2m_2{}^2\\&=(E_1E_2-\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)^2-m_1{}^2m_2{}^2\\&=E_1{}^2E_2{}^2-2E_1E_2\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1{}^2\cdot\boldsymbol{p}_2{}^2-m_1{}^2m_2{}^2\\&=E_1{}^2(p_2{}^2+m_2{}^2)-2E_1E_2\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2+p_1{}^2(E_2{}^2-m_2{}^2)\\&\qquad-m_1{}^2m_2{}^2\\&=\boldsymbol{p}_1{}^2E_2{}^2-2E_1E_2\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_2{}^2E_1{}^2=(\boldsymbol{p}_1E_2-\boldsymbol{p}_2E_1)^2\end{aligned}$$

である．$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ が平行という条件は，例えば m_2 の粒子の静止系から m_1 の粒子の運動方向へローレンツ変換を行って $\boldsymbol{p}_2\neq0$ となると考えればよい．このような入射粒子の組合せについてのみを考えることにすれば，式(8.51)は一般に成り立つ．式(8.51)の右辺は相対論的に不変な形をしている．したがってこれは重心系，実験室系にかかわらず任意の系で成り立つ．

式(8.48)，(8.50)，(8.51)を用いて微分断面積は

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma&=\frac{V}{|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|/V}\cdot(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2)\frac{1}{V^4}\frac{M^2m^2}{\omega_1\omega_2E_1E_2}\\&\qquad\times|\mathcal{M}_{fi}|^2\frac{V\mathrm{d}^3k_1}{(2\pi)^3}\frac{V\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^3}\\&=(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2)\frac{m^2}{\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m^4}}\frac{\mathrm{d}^3k_1}{(2\pi)^3}\\&\qquad\times\frac{M}{\omega_1}\frac{\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^3}\frac{M}{\omega_2}|\mathcal{M}_{fi}|^2\end{aligned} \tag{8.52}$$

となる．

ここまでくると一般に量子電気力学における微分断面積を求める方法がわかったことになる．

(1) 不変振幅 $\mathcal{M}_{fi}$ の絶対値の2乗を求める．

(2) これに終状態の位相体積 $\prod_f \mathrm{d}^3k_f/(2\pi)^3$ を掛ける．

(3) 終状態スピノールの規格化係数 $\prod_f m_f/E_f$ を掛ける(式(4.86)参照)．

(4) 初期状態に対するフラックス係数，式 (8.51) を掛ける．

(5) 最後に全体のエネルギー・運動量保存則，$(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)$ を掛ける．これが式 (8.52) である．

では不変振幅 $\mathcal{M}_{fi}$ はどうやって求めるか．

(6) 問題に対応するファインマン図を書き，4元運動量を書き込む．

(7) ファインマン図から，始状態と終状態のスピノールを正しくとる．

(8) 各バーテックスに対して因子 $e\gamma^\rho$ を与え，二つのスピノールでこれをはさんで4元電流 $e\bar{\psi}_n\gamma^\rho\psi_n$ を作る（ψ_n は(7)で与えたスピノール)．

(9) フォトンプロパゲーターとして式 (5.21) をとる．

(10) 始状態から終状態まで忠実に(7)，(8)をとり，並べる．

$e^-e^+\to\mu^-\mu^+$ の場合は式 (8.49) で具体的にこの (6)～(10) を実行している．

以上をファインマン則とよび，より複雑な反応についても，ファインマン図さえ書けばただちに微分断面積の式を書き下すことができることがわかった．

終状態について現れる因子 $\mathrm{d}^3p/2E$ は

$$\frac{\mathrm{d}^3p}{2E}=\int\mathrm{d}^4p\,\theta(p^0)\,\delta(p^2-m^2),\qquad E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\qquad(8.53)$$

と書くことができるから(実際，p^0 の積分を実行して見よ)，これは相対論的に不変な量である．したがって式 (8.52) の右辺は完全に相対論的に不変な形で書かれている．$\mathcal{M}_{fi}$ を不変振幅とよぶのはこのためである．すなわち $\mathcal{M}_{fi}$ は任意の系で計算し

てよい．

式 (8.49) の不変振幅の絶対値の2乗を求めると，式(8.39)を使って

$$\frac{e^4}{(q^2)^2}[\bar{u}_\mu(k_1)\gamma^\rho v_\mu(k_2)\,\bar{v}_\mu(k_2)\gamma^\sigma u_\mu(k_1)]$$

$$\times[\bar{v}_e(p_2)\gamma_\rho u_e(p_1)\,\bar{u}_e(p_1)\gamma_\sigma v_e(p_2)]$$

ここで $\bar{\gamma}^\sigma \equiv \gamma^0(\gamma^\sigma)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\sigma$ を用いた．スピン和をとると（初期状態のスピンについての平均からくる$(1/2)^2$を考慮して），次のようになる．

$$|\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{k}_1+M}{2M}\gamma^\rho\frac{\not{k}_2-M}{2M}\gamma^\sigma\right)$$

$$\cdot\mathrm{Tr}\left(\frac{\not{p}_2-m}{2m}\gamma^\rho\frac{\not{p}_1+m}{2m}\gamma_\sigma\right)\frac{e^4}{(q^2)^2}$$

$$=\frac{1}{64m^2M^2}\mathrm{Tr}(\not{k}_1\gamma^\rho\not{k}_2\gamma^\sigma-M^2\gamma^\rho\gamma^\sigma)$$

$$\cdot\mathrm{Tr}(\not{p}_2\gamma_\rho\not{p}_1\gamma_\sigma-m^2\gamma_\rho\gamma_\sigma)\frac{e^4}{(q^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4m^2M^2}[k_1{}^\rho k_2{}^\sigma+k_1{}^\sigma k_2{}^\rho-(k_1\cdot k_2+M^2)g^{\rho\sigma}]$$

$$\cdot[p_{1\sigma}p_{2\rho}+p_{1\rho}p_{2\sigma}-(p_1\cdot p_2+m^2)g_{\rho\sigma}]\frac{e^4}{(q^2)^2}$$

$$=\frac{1}{2m^2M^2}(k_1\cdot p_2\;k_2\cdot p_1+k_1\cdot p_1\;k_2\cdot p_2+m^2k_1\cdot k_2$$

$$+M^2p_1\cdot p_2+2M^2m^2)\frac{e^4}{(q^2)^2} \tag{8.54}$$

ここで**マンデルスタム変数**とよばれるローレンツ不変量

$$\begin{aligned} s &= (p_1+p_2)^2 = (k_1+k_2)^2 = q^2 \\ t &= (p_1-k_1)^2 = (p_2-k_2)^2 \\ u &= (p_1-k_2)^2 = (p_2-k_1)^2 \end{aligned} \tag{8.55}$$

を導入する．すぐわかるように

$$s+t+u = p_1{}^2+p_2{}^2+k_1{}^2+k_2{}^2 = 2(M^2+m^2) \tag{8.56}$$

である．これを用いて式 (8.53) は

$$|\overline{\mathcal{M}}_{\rm fi}|^2 = \frac{1}{8m^2M^2}\frac{e^4}{s^2}[u^2+t^2+4(m^2+M^2)s-2(m^2+M^2)^2]$$

$$\equiv \frac{1}{8m^2M^2}\frac{e^4}{s^2}f(s,t) \tag{8.57}$$

となる．

問題　式(8.57)を確かめよ．

式 (8.52) のスピン和は結局，次のようになる．

$$d\bar{\sigma} = (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2)\frac{1}{\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m^4}} \times\frac{d^3k_1}{(2\pi)^3\omega_1}\frac{d^3k_2}{(2\pi)^3\omega_2}\frac{e^4}{8s^2}f(s,t) \tag{8.58}$$

ここで式 (8.53) を用いると $d^3k_2/2\omega_2$ と $\delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2)$ が打ち消し合い，$\alpha = e^2/4\pi$，$d^3k_1 = k_1{}^2dk_1d\Omega = k_1\omega_1d\omega_1d\Omega$ を用いて

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s^2}f(s,t)\int\frac{1}{\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-m^4}}k_1d\omega_1\,\theta(E_1+E_2-\omega_1) \times\delta[(p_1+p_2-k_1)^2-M^2] \tag{8.59}$$

が得られる．

特に重心系をとり，また高エネルギー散乱 ($s\gg m^2, M^2$) を考えて質量 m, M をゼロとおくと ($s=(p_1+p_2)^2=4E_1{}^2$)

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \alpha^2\cdot\frac{u^2+t^2}{s^2}\cdot\frac{2}{s}\int\omega d\omega\,\theta(2E_1-\omega)\,\delta(s-4\omega E_1) = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{s}\frac{u^2+t^2}{s^2} \tag{8.60}$$

となる．重心系では

$$t = (p_1-k_1)^2 = m^2+M^2-2p_1\cdot k_1 \fallingdotseq -2p_1\cdot k_1 = -2E_1{}^2(1-\cos\theta) = -\frac{1}{2}s(1-\cos\theta)$$

$$u = (p_1-k_2)^2 = m^2+M^2-2p_1\cdot k_2 \fallingdotseq -2p_1\cdot k_2 = -2E_1{}^2(1+\cos\theta) = -\frac{1}{2}s(1+\cos\theta)$$

と書ける．ここで θ は散乱角である．これを用いて式 (8.60) は最終的に

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{s}(1+\cos^2\theta) \tag{8.61}$$

となる．散乱角 θ について積分すると，全断面積は

$$\bar{\sigma}(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \tag{8.62}$$

で与えられる．この式は後に重要な役割を果すことになる．

式 (8.62) からいろいろなことがわかる．分母の s は重心系での全エネルギーの 2 乗であるから，断面積はエネルギーに依存する．断面積の単位として

$$1\,[\mathrm{barn}] = 10^{-28}\,[\mathrm{m}^2] \tag{8.63}$$

をとると，これが素粒子断面積の目安となる．例えば原子核をとると，その大きさは π 中間子 ($m_\pi \fallingdotseq 140$ MeV) のコンプトン波長程度と見なせるから式 (1.6) を用いて

$$\begin{aligned}\pi\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 &= \pi\left(\frac{197}{140}\times 10^{-15}\,[\mathrm{m}]\right)^2 \fallingdotseq 6\times 10^{-2}\,[\mathrm{barn}] \\ &= 60\,[\mathrm{mb}]\end{aligned} \tag{8.64}$$

であり，πN 散乱の実験は（1 GeV 近辺で）たしかにこのオーダーの値を与える．

式 (8.62) において $s=1\,\mathrm{GeV}^2$ にとると，再び式 (1.6) を用いて

$$\sigma = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{137}\right)^2(1.97\times 10^{-16}\,[\mathrm{m}])^2 \fallingdotseq 10^{-35}\,[\mathrm{m}^2] = 0.1\,[\mu\mathrm{b}] \tag{8.65}$$

式(8.64)と式(8.65)を比較すると，電磁相互作用は結合定数 α^2 のために強い相互作用と比べてずっと小さな値を与えることがわかる．これが 8.3 節で議論した断面積の概念に対する具体的な計算例である．

8.6 くりこみ[2)]

8.5 節では反応 $e^-e^+ \to \mu^-\mu^+$ に対して 1 フォトン交換の図 8.7 を計算した．一般にわれわれが散乱の観測を行うのは初期状態

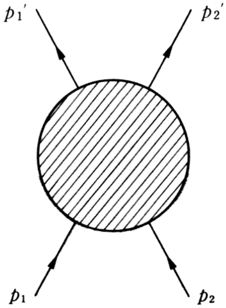


図 8.8　一般の 2 粒子散乱

の 2 粒子，および終状態の 2 粒子であって，これらが実際にどんな相互作用を行っているのかはブラックボックスである（図 8.8）．QED の場合は $\alpha \ll 1$ であるから摂動展開が可能であり，最も単純なグラフから始めて，より高次のグラフを計算していき，最後にこれらを足し合せて満足のゆく結果が得られる，として一見よさそうに見える．ところがこれは最低次の次のオーダーですでに破綻をきたすのである．例えば電子と陽電子の散乱に対する e の 4 次のグラフ（バーテックスの数が 4）の例を図 8.9 に示す．

このほかにも 4 次のグラフは多数考えられるが，これが図 8.8 のブラックボックスの中味の例である．図 8.9 を 8.5 節で述

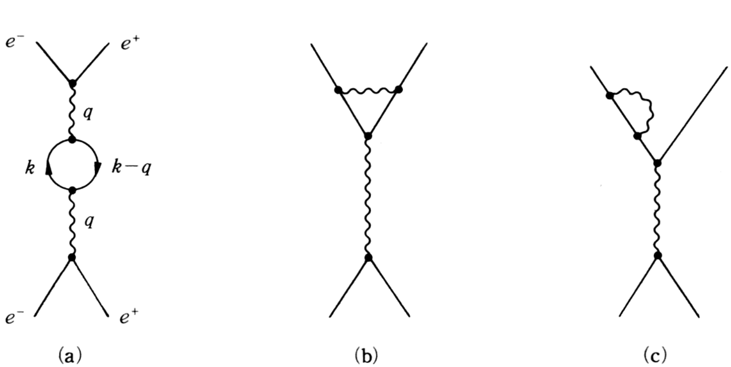


図 8.9　e^+e^- 散乱に対する 4 次のグラフの例

べた一般論に従って計算しようとすると積分が発散してしまうのである．いかにしてこれらの無限大を取り扱い，有限な結果を導き出すかが問題となる．これを**くりこみ理論**とよぶ．有限回の操作のくりこみによって最終的に有限量だけで記述できるとき，これを**くりこみ可能**とよぶ．QED はくりこみ可能であることが知られている．また，弱い相互作用や次章で述べる量子色力学（QCD）のようなゲージ理論もくりこみ可能であることが知られている．本書ではくりこみの一般論は扱わないが，後の応用のために具体的な例をとって計算をし，無限大の取扱いに対する展望を行う．

図 8.9 において（a）はフォトンが電子・陽電子の対生成を行い，ついで対消滅をして再びフォトンに戻っている．これを**真空偏極**とよぶ（真空偏極という言葉と，その物理的意味については本節の最後に述べる）．図 (b) はバーテックス補正，（c）は電子の自己質量とよばれる．ここでは (a) について計算しよう．これはフォトンのプロパゲーターに対する補正と見なすことができる．

図 8.9（a）のフォトンのプロパーゲーターは，

$$\frac{-i}{q^2+i\varepsilon}I_{\mu\nu}(q)\frac{-i}{q^2+i\varepsilon}$$

$$I_{\mu\nu}(q)\equiv -e^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left(\gamma_\mu\frac{1}{\not{k}-m+i\varepsilon}\gamma_\nu\frac{1}{\not{k}-\not{q}-m+i\varepsilon}\right) \tag{8.66}$$

と書くことができる．$I_{\mu\nu}(q)$が中央のループからの寄与である．

式（8.62）において全体の符号のマイナスとトレースが出てくるのは以下からわかるであろう[3]．グラフの中央のループ部分に対して

$$[\bar{\psi}(x)_\alpha(\gamma^\nu)_{\alpha\beta}\psi(x)_\beta][\bar{\psi}(y)_\rho(\gamma^\mu)_{\rho\sigma}\psi(y)_\sigma]$$
$$=-\psi(y)_\sigma\,\bar{\psi}(x)_\alpha(\gamma^\nu)_{\alpha\beta}\psi(x)_\beta\,\bar{\psi}(y)_\rho(\gamma^\mu)_{\rho\sigma}\qquad(y^0>x^0)$$

が成り立つ．1 行目から 2 行目に移るとき $\psi(y)$ は三つの ψ をとび越えているがフェルミオンの反対称性（反交換関係，式

(4.87)) のために全体の符号はマイナスとなる．添字を見るとたしかにトレースとなっている．また，$\psi(y)\bar{\psi}(x)\,(y^0>x^0)$ から $S_{\mathrm{F}}(y-x)$ が出る．$\psi(x)\bar{\psi}(y)$ も同様 (式(8.17)参照)．一般にフェルミオンのループに対しては，このように (-1) の因子が掛る．式 (8.66) はそのフーリエ変換である．

式 (8.66) の積分は，$\int \mathrm{d}^4k/k^2$ の形をしているから 2 次の発散積分に見えるが，電磁場のゲージ不変性と引算の方法で形式的に有限な答を得ることができることを以下に見る．後は物理解釈をすればよい．

まず

$$\frac{1}{\not{k}-m+i\varepsilon}=\frac{\not{k}+m}{k^2-m^2+i\varepsilon}=-i(\not{k}+m)\int_0^\infty \mathrm{d}z\, e^{iz(k^2-m^2+i\varepsilon)}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(q) &= -(-ie)^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}[\gamma_\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu(\not{k}-\not{q}+m)] \\
&\qquad\times\int_0^\infty \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\exp\{iz_1(k^2-m^2+i\varepsilon) \\
&\qquad + iz_2[(k-q)^2-m^2+i\varepsilon]\} \\
&= 4e^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}[k_\mu(k-q)_\nu+k_\nu(k-q)_\mu \\
&\qquad -g_{\mu\nu}(k^2-k\cdot q-m^2)] \\
&\qquad\times\int_0^\infty \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\exp i[(z_1+z_2)k^2-2z_2q\cdot k+z_2q^2 \\
&\qquad -(z_1+z_2)(m^2-i\varepsilon)]
\end{aligned}\tag{8.67}$$

ここでトレースの計算は前と同様に実行している．式 (8.67) において指数関数の肩は平方完成によって

$$\begin{aligned}
&(z_1+z_2)k^2-2z_2q\cdot k+z_2q^2-(z_1+z_2)(m^2-i\varepsilon) \\
&\quad=(z_1+z_2)\left(k-\frac{z_2}{z_1+z_2}q\right)^2+\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}q^2 \\
&\qquad -(z_1+z_2)(m^2-i\varepsilon)
\end{aligned}$$

と書けるから，変数変換 $l=k-[z_2/(z_1+z_2)]q$ とおいて式 (8.67) は次のように書ける．

$$I_{\mu\nu}(q) = 4e^2\int_0^\infty \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \exp i\left[\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}q^2-(z_1+z_2)(m^2-i\varepsilon)\right]$$
$$\times\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\exp[i(z_1+z_2)l^2]$$
$$\times\left\{2l_\mu l_\nu-\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}(q_\mu l_\nu+q_\nu l_\mu)-\frac{2z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}q_\mu q_\nu\right.$$
$$-g_{\mu\nu}\left[l^2+\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}q\cdot l+\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}q^2\right.$$
$$\left.\left.-(m^2-i\varepsilon)\right]\right\} \tag{8.68}$$

ここで公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}l_0}{2\pi}e^{il_0{}^2(a+i\varepsilon)}=\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi a}} \tag{8.69}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}l_i}{2\pi}e^{-il_i{}^2(a+i\varepsilon)}=\frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi a}} \tag{8.70}$$

を用いる．式 (8.69) は $l_0\to l_0e^{i\pi/4}$ と変換するとガウス積分になり，右辺が得られる．式 (8.70) も同様．これからただちに

$$\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}e^{il^2a}=\left(\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi a}}\right)\left(\frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi a}}\right)^3=\frac{-i}{16\pi^2a^2} \tag{8.71}$$

が得られる．また，

$$\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}l_\mu e^{il^2a}=0 \tag{8.72}$$

は明らかであろう．式(8.69)と式(8.70)より（それぞれ a で微分して）

$$\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}l_0^2e^{il^2a}=\left(\frac{ie^{i\pi/4}}{4\sqrt{\pi a}\,a}\right)\left(\frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi a}}\right)^3=\frac{1}{32\pi^2a^3} \tag{8.73}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}l_i^2e^{il^2a}=\left(\frac{-ie^{-i\pi/4}}{4\sqrt{\pi a}\,a}\right)\left(\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi a}}\right)\left(\frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi a}}\right)^2=\frac{-1}{32\pi^2a^3} \tag{8.74}$$

が得られる．式(8.73)と式(8.74)はまとめて

$$\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}l_\mu l_\nu e^{il^2a}=\frac{g_{\mu\nu}}{32\pi^2a^3} \tag{8.75}$$

と書ける（$\mu\neq\nu$ のときは式 (8.72) よりゼロである）．

式(8.71)，(8.72)，(8.75)を式(8.68)に代入して

$$I_{\mu\nu} = \frac{-i\alpha}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \frac{1}{(z_1+z_2)^2}$$
$$\times \exp i\left[\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2}q^2 - (z_1+z_2)(m^2-i\varepsilon)\right]$$
$$\times\left\{2(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)}\right.$$
$$\left. + g_{\mu\nu}\left[\frac{-i}{z_1+z_2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2}q^2 + (m^2-i\varepsilon)\right]\right\} \quad (8.76)$$

となる ($\alpha = e^2/4\pi$).

問題　式 (8.76) を確かめよ.

図 8.9 (a) においてフォトンのプロパゲーターは上下のバーテックスで電子の保存カレント $J_\mu(x)$ および $J_\nu(y)$ と結合する. したがって

$$q^\mu I_{\mu\nu}(q) = 0, \qquad I_{\mu\nu}(q)q^\nu = 0 \quad (8.77)$$

が成り立つ. これは別の言い方をすれば電磁場のゲージ変換 (2.24) の下での不変性といってもよい. 式 (8.76) において $(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)$ に比例する項はたしかに式 (8.77) を満足するが, $g_{\mu\nu}$ に比例する項はこの条件を満足していない. ということはこの項はゼロになることを意味する. 実際,

$$J \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \frac{1}{(z_1+z_2)^2}\exp i\left[\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2}q^2 - (m^2-i\varepsilon)\right.$$
$$\left.\times(z_1+z_2)\right]\left[\frac{-i}{z_1+z_2} - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2}q^2 + m^2 - i\varepsilon\right]$$

において $z_i \to \lambda z_i$ とおくと

$$J = \int_0^\infty \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \frac{1}{(z_1+z_2)^2}\exp i\lambda\left[\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2}q^2 - (m^2-i\varepsilon)\right.$$
$$\left.\times(z_1+z_2)\right]\left[\frac{-i}{\lambda(z_1+z_2)} - \frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2}q^2 + m^2 - i\varepsilon\right]$$
$$= i\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\infty \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \frac{1}{\lambda(z_1+z_2)^3}\exp i\lambda\left[\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2}q^2\right.$$
$$\left. - (m^2-i\varepsilon)(z_1+z_2)\right]$$

最後の式で $z_i \to z_i/\lambda$ とおくと

$$J = i\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2}{(z_1+z_2)^3}\exp i\left[\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}q^2-(m^2-i\varepsilon)(z_1+z_2)\right]$$

となり，この積分は λ によらないから $J=0$ が示された．

したがって

$$I_{\mu\nu} = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\int_0^\infty \mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\frac{z_1z_2}{(z_1+z_2)^4}$$
$$\times\exp i\left[\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}q^2-(z_1+z_2)(m^2-i\varepsilon)\right] \qquad (8.78)$$

となる．ここで

$$1 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\delta\left(1-\frac{z_1+z_2}{\lambda}\right) \qquad (8.79)$$

を用いて式 (8.78) は

$$I_{\mu\nu} = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\frac{z_1z_2}{\lambda(z_1+z_2)^4}\delta\left(1-\frac{z_1+z_2}{\lambda}\right)$$
$$\times\exp i\left[\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}q^2-(z_1+z_2)(m^2-i\varepsilon)\right] \qquad (8.80)$$

となる．式 (8.80) において $z_i \to \lambda z_i$ とおくと

$$I_{\mu\nu}(q) = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\frac{z_1z_2}{\lambda(z_1+z_2)^4}$$
$$\times\delta(1-z_1-z_2)\exp i\lambda\left[\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}q^2\right.$$
$$\left.-(z_1+z_2)(m^2-i\varepsilon)\right]$$
$$= \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\int_0^1 \mathrm{d}z\, z(1-z)\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$$
$$\times\exp i\lambda[z(1-z)q^2-(m^2-i\varepsilon)] \qquad (8.81)$$

式 (8.81) は $\lambda\to 0$ で対数発散している．したがって $I_{\mu\nu}(q)$ の代りに十分大きな M を用いて $\bar{I}_{\mu\nu}(q) = I_{\mu\nu}(q, m) - I_{\mu\nu}(q, M)$ を考えよう（数学的に厳密な方法を好む読者は，最初から $\bar{I}_{\mu\nu}(q)$ をとって計算すればよい．実際，式 (8.66) で m の代りに M をとった式から $\bar{I}_{\mu\nu}$ を作り，$M\to\infty$ にすると $\bar{I}_{\mu\nu}\to I_{\mu\nu}$ である）．

$$\bar{I}_{\mu\nu}(q) = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\int_0^1 \mathrm{d}z\, z(1-z)\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$$
$$\times\Big\{\exp i\lambda[z(1-z)]q^2 - (m^2 - i\varepsilon)$$
$$-\exp i\lambda[z(1-z)q^2 - (M^2 - i\varepsilon)]\Big\} \tag{8.82}$$

これはたしかに有限な積分である．これをパウリ-ビラーの引算法とよぶ．

式 (8.82) の積分は以下のように計算される．

$$J(A) \equiv \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}[e^{i\lambda(A-m^2+i\varepsilon)} - e^{i\lambda(A-M^2+i\varepsilon)}]$$

とおくと

$$\frac{\partial J}{\partial A} = i\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda[e^{i\lambda(A-m^2+i\varepsilon)} - e^{i\lambda(A-M^2+i\varepsilon)}]$$
$$= \frac{1}{A-M^2} - \frac{1}{A-m^2}$$

より

$$J(A) = \log\frac{A-M^2}{A-m^2} \quad \xrightarrow[M^2 \gg A]{} \quad \log\frac{M^2}{m^2 - A}$$

したがって $A = z(1-z)q^2$ に対して十分大きな M を用いて

$$\bar{I}_{\mu\nu}(q) = \frac{2i\alpha}{\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\int_0^1 \mathrm{d}z\, z(1-z)$$
$$\times\log\frac{M^2}{m^2 - q^2 z(1-z)}$$
$$= \frac{i\alpha}{3\pi}(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\Big\{\log\frac{M^2}{m^2}$$
$$-6\int_0^1 \mathrm{d}z\, z(1-z)\log\Big[1 - \frac{q^2}{m^2}z(1-z)\Big]\Big\}$$
$$\equiv i(q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)I(q^2) \tag{8.83}$$

したがってフォトンのプロパゲーターは e^4 までのオーダーで（図 8.10 参照），

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-i}{q^2}\bar{I}_{\mu\nu}(q)\frac{-i}{q^2}$$
$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\Big\{1 - \frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{M^2}{m^2}$$

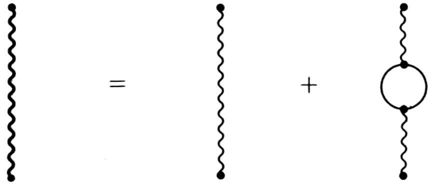


図 8.10 e^4 までのフォトンプロパゲーター

$$+\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z\, z(1-z)\log\left[1-\frac{q^2}{m^2}z(1-z)\right]\Bigg\} \qquad (8.84)$$

となる．ここで $q_\mu q_\nu$ の項は保存カレントに結合するのでゼロとおいた．

低エネルギー散乱を考えて $M^2 \gg q^2$ ととると式（8.84）の最後の積分は第2項に比べて無視できて，フォトンのプロパゲーターは（両端の結合定数 e^2 を入れて）

$$\frac{e^2}{q^2}\left(1-\frac{e^2}{12\pi^2}\log\frac{M^2}{m^2}\right) \qquad (8.85)$$

となる．

ここで物理が入る．本節の最初に注意したように，本来われわれが観測するのは始状態の粒子と終状態の粒子であり，途中の複雑な相互作用の部分はブラックボックスである．すなわち式(8.85) に現れる e を e_0 と書いてこれを**裸の電荷**とよぶことにすると，全体の結果として現れた

$$e^2 \equiv {e_0}^2\left(1-\frac{{e_0}^2}{12\pi^2}\log\frac{M^2}{m^2}\right) \qquad (8.86)$$

が実際に観測される電磁相互作用の強さとしての電荷であり，この e を用いて $e^2/4\pi=1/137$ となる．計算途中に現れた（無限大の）M や e_0 は観測量ではない．このように種々の無限大の量を組み合せて観測量の中にくりこんでしまい，結果を有限な観測量で書き直してしまうのがくりこみ理論の精神である．

8.7 結合“定数”[4)]

式 (8.83) において $I(q^2)$ は一般に q^2 の関数である．前節と異

なり今度は q^2 が十分大きい場合を考える．このとき $\log[1-z(1-z)q^2/m^2] \fallingdotseq \log(-q^2/m^2)$ とおいてよいから，

$$I(Q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{M^2}{m^2} - \frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{-q^2}{m^2} = \frac{\alpha}{3\pi}\log\frac{M^2}{Q^2} \quad (8.87)$$

ここで virtual フォトンは空間的（$q^2<0$）とし，$Q^2=-q^2$ とおいた．すなわち電磁場によって電子が散乱される場合のフォトンプロパゲーターを考えている（図 8.11）．この場合のフォトンは空間的であることを式（5.28）で示した．

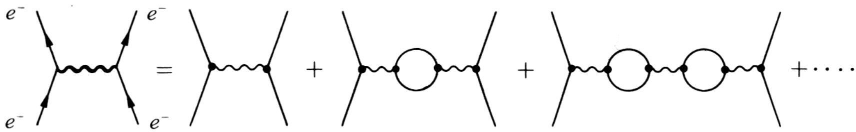


図 8.11　電子散乱とフォトンプロパゲーター

図 8.11 において左辺の太い波線は完全プロパゲーターであり，右辺は自由プロパゲーターと電子・陽電子のループによるその摂動展開である．上にも述べたように右辺の全体が観測される結合"定数" $\alpha(Q^2)$ を与える．式で表すと（フェルミオンのループに対して因子（-1）が入ること考慮して），

$$\alpha(Q^2) = \alpha_0[1-I(Q^2)+I(Q^2)^2-I(Q^2)^3+\cdots\cdots]$$

$$= \frac{\alpha_0}{1+I(Q^2)} = \frac{\alpha_0}{1+(\alpha_0/3\pi)\log(M^2/Q^2)}$$

$$\left(\alpha_0 = \frac{e_0{}^2}{4\pi}\right) \quad (8.88)$$

低エネルギーにおいて観測される α の値が 1/137 であるから，これを $Q^2=\mu^2$ で規格化しよう．

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1+(\alpha_0/3\pi)\log(M^2/\mu^2)} = \frac{1}{137} \quad (8.89)$$

式（8.88）を変形し，式（8.89）を用いると

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_0}{1+(\alpha_0/3\pi)\log(M^2/\mu^2)+(\alpha_0/3\pi)\log(\mu^2/Q^2)}$$

$$= \frac{\alpha_0}{\alpha_0/\alpha(\mu^2)+(\alpha_0/3\pi)\log(\mu^2/Q^2)}$$

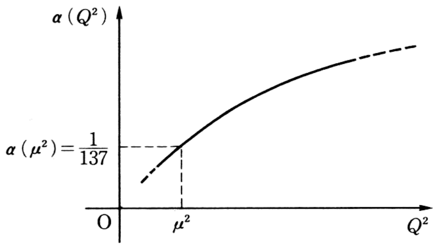


図 8.12 電磁相互作用の結合“定数”

$$
=\frac{\alpha(\mu^2)}{1-[\alpha(\mu^2)/3\pi]\log(Q^2/\mu^2)} \tag{8.90}
$$

となって最後の結果には α_0 も M も表れず，観測量だけで書かれている．式 (8.90) の結合定数 $\alpha(Q^2)$ の Q^2 に対するふるまいを図 8.12 に示す．

図からわかるように $\alpha(Q^2)$ は Q^2 が大きくなるにつれて大きくなる．Q^2 が大きいということは距離が短いことを意味する．短距離で電荷が大きくなることは次のように考えるとよい．

電子はフォトンを出し，そのフォトンを再び吸収する．このフォトンは電子・陽電子の対生成・対消滅を行うが，中心の電子は電荷がマイナスなので，この電子・陽電子対は陽電子が中心の電子近くに，電子は中心から離れて分布する (図 8.13)．したがってちょうど誘電体に電場をかけたときに誘電分極が起こるように，電子のまわりの真空が偏極を起こす．これを**真空偏極**とよぶ．このようなフォトンおよび電子・陽電子対の雲が取り巻いているのが電子である．さて，電子電荷を測るために探査棒をこの雲の奥深くつっこんで見よう．遠くから見たときの電子の電荷が観測される電子電荷 $-e$ である．中心近くのプラスの電荷の雲の中に入ってその内側の電荷を測れば当然（マイナスで）大きく観測されることになる．この効果は内側に入れば入るほど大きくなるから，図 8.12 のようなふるまいとなる．ここで探査棒と書いたのは実際は素粒子でよい．素粒子散乱で高エネルギーになるほど，素粒子を取り巻く内側の構造が見えてくるのである．これについては 10.1 節で再び議論する．

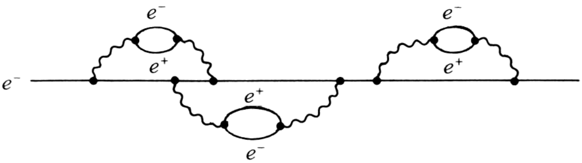


図8.13　電子のまわりの真空偏極

結論は簡単にまとめることができる.

相互作用の強さを決める結合“定数”は定数ではなく，エネルギーの関数である.

QEDの場合は結合定数はエネルギーとともに大きくなる.

最後に注意を二つ述べておく.

(1)　この節では図8.9(a)の真空偏極のみを計算した. (b)と(c)の寄与はどうなるか. 実は(b)と(c)の寄与は電荷のくりこみに対しては互いに打ち消し合い，結果には利いてこない. したがって電荷のくりこみに関してはここでの議論で十分である.

(2)　フェルミオンのループとしてここでは電子・陽電子の対生成・対消滅だけをとったが，実際は電子以外のレプトンおよびクォークの寄与がある. どの粒子が利くかはエネルギーに依存するが，ここでは議論しない. なぜなら，式(8.90)からわかるようにエネルギー依存性は対数的であるからよほど大きなエネルギーにしないとその効果は見えないが，高エネルギーになると電磁相互作用は6章で述べた弱・電磁相互作用に吸収され，SU(2)および$U(1)_Y$に対する結合“定数”を考えねばならないからである. これについては12.2節で議論する.

参考文献

1)　Kaku, M. : Quantum Field Theory (Oxford, 1993).
2)　Bjorken, J. D. and Drell, S. D. : 前出.
3)　Mandl, F. and Shaw, G. : Quantum Field Theory (John Wiley & Sons, 1984).
4)　Halzen, F. and Martin, A. D. : 前出.

9 量子色力学

9.1 ハドロンのクォークモデル[1)]

9.1.1 ハドロンの統一

実際に観測されるハドロンは300種類以上にも及ぶ．これらのハドロンをなんらかの法則性の下に統一的に扱うことができないかと考えるのは自然なことである．その指針の一つは3.6.2項で考察した核子に対するアイソスピン対称性である．すなわち陽子と中性子をアイソ空間における SU(2) 対称性を用いてアイソ2重項である核子にまとめることができたように，対称性を考慮することによってハドロンをより基礎的な対象で表すことである．もう一つは，原子核を陽子と中性子の集合としてそれらの組合せで種々の元素が作られるのと同様に，ハドロンの構成要素を考え，それらの組合せで種々のハドロンが作られるとする方法である．対称性と構成要素というこの二つを基礎にハドロンを記述することを以下に試みる

はじめに準備として SU(2) の復習をしておく．

9.1.2 SU(2) 対称性

SU(2) の2重項として I_3 の固有状態のアイソスピン上向き (↑) または下向き (↓) をとることができる．このような2重

項で表される粒子二つからなる系に対して，その組合せは（↑↑），（↑↓），（↓↑），（↓↓）の4通りである．全アイソスピンを，$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}^{(1)}+\boldsymbol{I}^{(2)}$ と表す．かっこの中の添字(1)，(2)はそれぞれ1番目および2番目の粒子にのみ作用する演算子であることを表す．$I_3=\tau_3/2$ に対して

$$I_3(\uparrow\uparrow) = (I_3^{(1)}\uparrow)\uparrow + \uparrow(I_3^{(2)}\uparrow) = \frac{1}{2}(\uparrow\uparrow)+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow)$$
$$= (\uparrow\uparrow) \tag{9.1}$$

より（↑↑）は $I_3=+1$ である．上昇・下降演算子 $I_\pm=I_1\pm iI_2$ を用いて

$$\boldsymbol{I}^2 = [\boldsymbol{I}^{(1)}]^2+[\boldsymbol{I}^{(2)}]^2+2\boldsymbol{I}^{(1)}\cdot\boldsymbol{I}^{(2)}$$
$$= [\boldsymbol{I}^{(1)}]^2+[\boldsymbol{I}^{(2)}]^2+2\left\{\frac{1}{2}[I_+^{(1)}I_-^{(2)}+I_-^{(1)}I_+^{(2)}]+I_3^{(1)}I_3^{(2)}\right\} \tag{9.2}$$

と書けるから

$$\boldsymbol{I}^2(\uparrow\uparrow) = 2(\uparrow\uparrow) \tag{9.3}$$

となり，$\boldsymbol{I}^2=I(I+1)=2$ より $I=1$ である．したがって I, I_3 の固有状態を $|I, I_3\rangle$ で表すと（↑↑）$=|1, +1\rangle$ となる．

問題　式(9.2)を用いて式(9.3)を導け．

（↑↑）に下降演算子 $I_-=I_-^{(1)}+I_-^{(2)}$ を作用させると

$$I_-(\uparrow\uparrow) = [I_-^{(1)}\uparrow]\uparrow + \uparrow[I_-^{(2)}\uparrow] = \downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow \tag{9.4}$$

となるが，一方 $I_-|1, +1\rangle=\sqrt{2}|1, 0\rangle$ を用いると結局 $|1, 0\rangle=(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}$ となる．$|1, 0\rangle$ にさらに I_- を作用させると $|1, -1\rangle=(\downarrow\downarrow)$ が得られる．まとめると，

$$\begin{cases} |1, +1\rangle = (\uparrow\uparrow) \\ |1, 0\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) \\ |1, -1\rangle = (\downarrow\downarrow) \end{cases} \tag{9.5}$$

となる．式(9.5)の3重項は粒子1と2の入れ換えに対して対

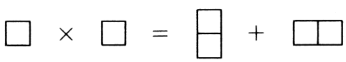
称であることに注意しよう．アイソスピン 1/2 の 2 粒子系の四つの状態のうち，残りの一つは

$$|0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow) \tag{9.6}$$

である．式 (9.6) は粒子 1 と 2 の入れ換えに対して反対称になっている．

SU(2) の任意の演算の下で式 (9.5) と式 (9.6) は互いに混じり合うことがなく，かつ，これ以上に $\boldsymbol{I}$ の下で互いに独立な要素に分解できない．一般に群の表現が互いに独立な表現の直和に分解できるとき**可約**とよぶ．そうできないときこれを**既約**とよぶ．スピン 1/2 をもつ二つの粒子からなる系は二つの既約表現，式 (9.5) と式 (9.6) の直和に分解される．

2 重項を□で表すことにする．このとき二つの 2 重項からなる系は対称な系，式 (9.5) と反対称な系，式 (9.6) の二つの既約表現の和からなっている．これを



$$\underset{\sim}{2}\times\underset{\sim}{2}=\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{3} \tag{9.7}$$

と表す．□が縦に並んだとき反対称，横に並んだとき対称と約束する．また，式 (9.7) において□の式の下にある数字は各既約表現の次元を表す．初めの□に次の□をのりづけするとき，下につけて反対称な組合せにするか，右につけて対称な組合せにするかの 2 通りしかない．このとき反対称な組合せ $[i,j]$ $(i, j=1,2)$ は一つしかなく，対称な組合せは $(i,i)\,(i=1,2)$ が二つ，$(i,j)\,(i\neq j)$ が一つの計三つである．式 (9.7) のような表し方を**ヤング・タブロー**とよぶ．

SU(n) の変換は式 (3.73) より $U(\boldsymbol{\theta})=\exp(-i\theta^i T_i)$ $(i=1, \cdots\cdots, n)$ と書けるが，$U(\boldsymbol{\theta})^*=\exp[-i\theta^i(-T_i^*)]$ もやはり SU(n) の変換であり，$-T_i^*$ はその生成元である．生成元として $-T_i^*$ をとったときの表現を**共役表現**とよぶ．特に $-T_i^*$ と T_i が同値のとき，すなわちある定行列 M を用いて $-T_i^*=$

MT_iM^{-1} と書けるとき，これを**実表現**とよぶ．SU(2) に対しては T_i として式 (3.78) の τ_i を用いて $T_i=\tau_i/2$ にとることができる．$M=\tau_2$ と選ぶと $-\tau_i{}^*=\tau_2\tau_i\tau_2$ であるから SU(2) の表現は実表現である．

9.1.3 クォーク 3 重項

原子核を，その構成要素 p と n のアイソスピン 2 重項である核子 $N=\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ の集合で表せることに対応して，任意のハドロンをその構成要素であるクォークのアイソスピン 2 重項 $q=\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ から作ることがまず考えられる．すなわち，すべてのハドロンは u クォークと d クォークから構成されるというモデルを思いつく．

ハドロンの相互作用，例えば π^-p 散乱の実験では新しいハドロンである Λ^0 と K^0 を生成することができる．Λ^0 および K^0 は十分長い寿命で崩壊する．例えば

$$\pi^-+p \longrightarrow \Lambda^0+K^0 \tag{9.8}$$

$$\Lambda^0 \longrightarrow p+\pi^-, \qquad K^0 \longrightarrow \pi^++\pi^- \tag{9.9}$$

式 (9.8) は強い相互作用であり，式 (9.9) は弱い相互作用である．このように同じ粒子に対して生成されるときは強い相互作用，崩壊するときは弱い相互作用であることを説明するには，新しい量子数 S を導入し，式 (9.8) の強い相互作用では S が保存され，式 (9.9) の弱い相互作用では S が保存されないと考えればよい．すなわち強い相互作用では S の保存則が成り立ち，一方，式 (9.9) の反応は S の保存則を破るために強い相互作用となり得ず，十分時間がたった後に弱い相互作用で崩壊すると考える．$S(\Lambda^0)=-1$，$S(K^0)=+1$，$S(\pi)=S(p)=0$ と約束すると，式 (9.8) では S が保存し，式 (9.9) では S が保存しないことがただちにわかる．量子数 S を**ストレンジネス**と名づける．

S の保存則には電荷 Q と同様に U(1) 対称性が対応する．この U(1) の生成元を電荷（チャージ）にならってハイパーチャ

ージ Y とよぶ．Y をバリオン数 B とストレンジネス S を用いて $Y=B+S$ とすると，ハドロンに対して次の関係式が成り立つ．

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \tag{9.10}$$

実際

π^+, π^0, π^- $(I_3=1, 0, -1, B=S=0)$

p, n $(I_3=\pm 1/2, B=1, S=0)$

Λ^0 $(I_3=0, B=1, S=-1)$

K^+, K^0 $(I_3=\pm 1/2, B=0, S=+1)$

等に対して式 (9.10) が成り立つことを直接確かめることができる．式 (9.10) を**中野-西島-ゲル・マンの関係式**とよぶ．

ハドロンの構成要素であるクォークは K^0 や Λ^0 のような粒子も記述しなければならないから，u, d のほかに量子数 S をもった新しいクォークが必要となる．これを s クォークとよぶ．これらのクォークの量子数を表 9.1 に示す．なお，クォークにはさらに c, b, t のフレーバーがあるが，これらの「重い」クォークについては 10.3 節で議論することにする．

表 9.1 クォークと量子数

	I	I_3	Q	S	B	Y
u	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
s	0	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

問題 表 9.1 において，クォークに対しても式 (9.10) が成り立つことを確めよ．

u, d, s の三つのクォークを用いてハドロンを表すことができる．表 9.1 を用いて $p=(uud)$, $n=(udd)$, $\pi^+=(u\bar{d})$, $K^0=(d\bar{s})$ 等である．ここで $\bar{q}$ は q の反粒子で，クォーク q の量子

数の符号をすべて逆にした量子数をもつ．実際量子数についてのみいえばたしかにこれで合っている．したがってバリオン $B=(qqq)$，メソン $M=(q\bar{q})$ である．

アイソスピンのSU(2)とハイパーチャージのU(1)を部分群として含むような一つの対称性でこれらのクォークを記述できないかと考えるのは自然な拡張である．その最も簡単な対称性はSU(3)である．したがって核子をSU(2) 2重項 $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ で表したように，クォークをSU(3)の3重項で表す．

$$q=\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \qquad q=\{q^i\} \qquad (i=1,2,3) \tag{9.11}$$

クォークおよび反クォークの3重項を図9.1に示す．

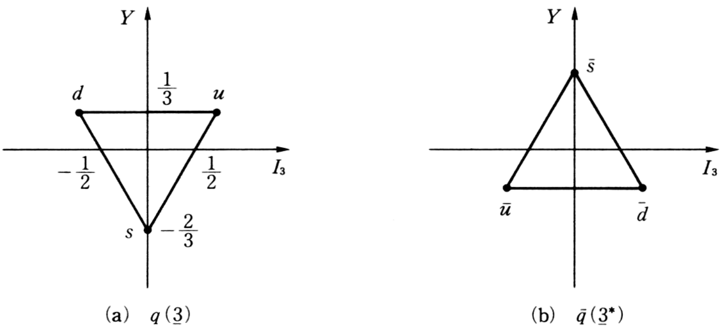


図9.1　クォークおよび反クォークの3重項

式(9.11)のクォーク3重項に対するSU(3)変換，$U(\boldsymbol{\theta})$ を考える．式(3.73)より $U(\boldsymbol{\theta})$ は

$$U(\boldsymbol{\theta}) = e^{-i\theta^a\lambda_a/2} \qquad (\theta^a \text{ は定数}) \tag{9.12}$$

と書ける．ここで $\lambda_a/2$ $(a=1,\cdots\cdots,8)$ はSU(2)の場合の $\tau_i/2$ $(i=1,2,3)$ に対応するSU(3)の生成元であり，3行3列のトレース・ゼロのエルミート行列で表される．λ_a の具体的な形は

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \tag{9.13}$$

これらの生成元の間には次の交換関係が成り立つ．

$$\left[\frac{\lambda_a}{2},\frac{\lambda_b}{2}\right]=if_{abc}\frac{\lambda_c}{2} \tag{9.14}$$

ここで**構造定数** f_{abc} は添字について完全反対称であり，その値は式（9.13）から直接求めることができる．

$n\times n$ 行列でトレースがゼロの独立な対角行列は $(n-1)$ 個ある．SU(2) の場合は τ_3 であり，これから $I_3=\tau_3/2$ の固有状態である ↑ と ↓ を作ることができた．SU(3) の場合は λ_3 と λ_8 が対角行列である．したがって $I_3=\lambda_3/2$, $Y=\lambda_8/\sqrt{3}$ とおくと I_3 と Y の同時固有状態を作ることができ，電荷演算子は式(9.10)を用いて

$$Q=I_3+\frac{Y}{2}=\frac{1}{2}\lambda_3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8=\begin{pmatrix}2/3&&0\\&-1/3&\\0&&-1/3\end{pmatrix} \tag{9.15}$$

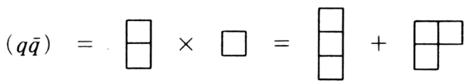
となり，たしかにこれは u, d, s の電荷である．

式（9.11）のクォーク 3 重項を□で表す．□$=\underline{3}$．このとき $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ は SU(2) の場合の式（9.6）に対応した二つのクォークの反対称な組合せ $(1/\sqrt{2})(q^iq^j-q^jq^i)\equiv[i,j]$ であるが，$i,j=1,2,3$ に対してこの組合せは 3 個ある．すなわち $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$ は□と同じ 3 次元であるが変換性が□と異なるため，これを $\underline{3}^*$ と書く．$\underline{3}^*$ は $\underline{3}$ の共役表現である．SU(3) の場合，SU(2) と異なり，実表現だ

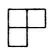
けでは表せない．この $\underline{3}^*$ 表現に対応する粒子を**反クォーク** ($\bar{q}$) とよぼう．

9.1.4　メソンのクォークモデル

メソンは q と $\bar{q}$ から作られる．SU(2) の場合の式 (9.7) に対応して ($q\bar{q}$) の組合せは



$$\underline{3}^* \times \underline{3} = \underline{1} + \underline{8} \tag{9.16}$$

となる． は三つの添字の完全反対称な組合せ $[i,[j,k]]$ であるが，$i, j, k=1,2,3$ の場合は一つしかない．一方  は対称な組合せ $(1/\sqrt{2})(q^i q^j + q^j q^i) \equiv (i,j)$ と反対称な組合せ $[i,k]$ からなる．これは $[k,(i,j)](k \neq i)$ の 6 個と，$[k,(i,j)](i \neq j \neq k)$ の 2 個で 8 個ある ($[i,(j,k)]+[j,(k,i)]+[k,(i,j)]=0$ である)．これらの次元を式 (9.16) において下段に示した．

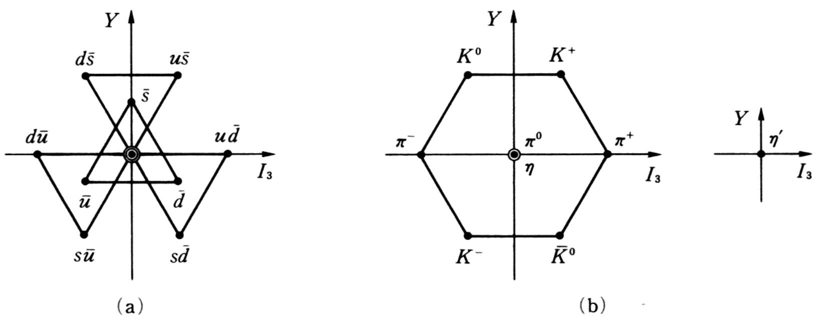


図 9.2　メソンの 9 重項．(a) $\underline{3}^* \times \underline{3}$，(b) 0^- メソンの $\underline{8}+\underline{1}$．

したがってメソンは 8 重項と 1 重項で作られる．これを別の方法で示すこともできる．メソン $\bar{q} \times q$ は，図 9.1(b)の $\bar{q}$ の表す 3 角形の各頂点に (a) の q に対応する 3 角形を重ねることによって作られる (図 9.2(a))．これによって中心には 3 角形

が三つ重なるから，$I_3=Y=0$ には三つのメソンが対応する．これらは $u\bar{u}, d\bar{d}$ および $s\bar{s}$ の組合せである．すぐわかるように，このうちSU(3)の1重項は u, d, s が完全に同等に入らねばならないから，これは $(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})/\sqrt{3}$ である（この書き方は単にクォークの入り方を表しているのであって，波動関数を書いているわけではないことに注意）．SU(2)のアイソスピン3重項については注意が必要である[2)]．クォークのアイソスピン2重項を $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ とすると，反クォークの2重項は $\begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$ である．$\bar{d}$ が $I_3=+1/2$, $\bar{u}$ が $I_3=-1/2$ に対応するから $\bar{d}$ の方が上にくる．$\bar{d}$ にマイナスがつくのは例えば2軸のまわりの π 回転で

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \longrightarrow e^{-i\pi\tau_2/2}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \tag{9.17}$$

となるから反クォークも同じ変換

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \tag{9.18}$$

をしなければならない．すなわち $\bar{u}\to -\bar{d}$, $\bar{d}\to \bar{u}$ である．このとき

$$\begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \tag{9.19}$$

となって反クォーク2重項を $\begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$ に選んでおくと，2重項の変換性が同じになる．したがって $q\bar{q}$ から作られるアイソスピン3重項は式(9.5)より，2番目の ↑ を $-\bar{d}$，↓ を $\bar{u}$ に選んで

$$\begin{cases} |1, +1\rangle = -u\bar{d} \\ |1, 0\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d}) \\ |1, -1\rangle = d\bar{u} \end{cases} \tag{9.20}$$

となる．$I_3=Y=0$ の三つのうち二つがこれで決まり，$(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})/\sqrt{3}$ と $(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$ である．残りの一つはこれらと直交する組合せをとればよいから $(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})/\sqrt{6}$ と

なる．

特に $q\bar{q}$ から作られる基底状態は，空間スピンを互いに逆向きに選んで，$J^P=0^-$ のプシュードスカラーである．パリティがマイナスとなるのは，パリティ演算子 γ^5（式 (4.67)）の固有値がクォークと反クォーク（式(4.45)の u と v）で逆となるからである．0^- メソンに対するクォーク成分を具体的に書くと，8 重項は

$$\underset{140}{\pi^+ = -(u\bar{d})}, \qquad \underset{135}{\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})}, \qquad \underset{140}{\pi^- = (d\bar{u})}$$

$$\underset{494}{K^+ = (u\bar{s})}, \qquad \underset{498}{K^0 = (d\bar{s})}, \qquad \underset{498}{\bar{K}^0 = (s\bar{d})}, \qquad \underset{494}{K^- = (s\bar{u})}$$

$$\underset{547}{\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})} \tag{9.21}$$

また，SU(3) 1 重項は

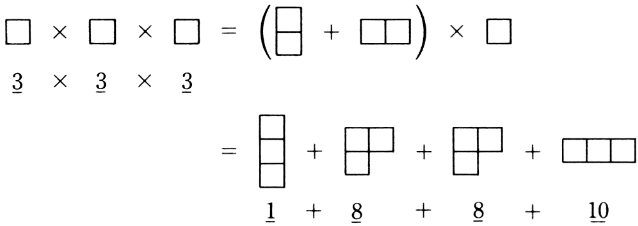
$$\underset{958}{\eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})} \tag{9.22}$$

となる．式 (9.21) と式 (9.22) の下段の数字はこれらの粒子の質量を MeV 単位で表したものである．0^- メソンに対する (I_3, Y) 図を図 9.2(b) に示す．

$(q\bar{q})$ 状態の二つのクォークについて，スピンの向き，回転，振動等の励起状態を考えると $J^P=1^-, 2^+$ 等のベクトルやテンソルのメソンを作ることができる．

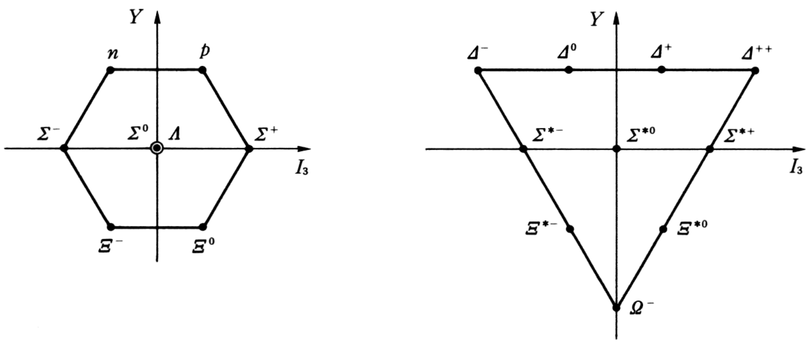
9.1.5 バリオンのクォークモデル

クォーク三つの組合せからバリオンが作られる．このときヤング・タブローは



(9.23)

となる．式 (9.23) において最後の □□□ は三つのクォークの対称な組合せであるが，これは三つのものから重複を許して三つ選ぶ組合せの数 ${}_3H_3={}_5C_3=10$ で，10 次元となる．



(a) 8　　(b) 10

図 9.3 バリオンのクォークモデル．(a) $(1/2)^+$ バリオン 8 重項，(b) $(3/2)^+$ バリオン 10 重項．

スピン 1/2 (↑↑↓ の組合せ．この場合の ↑ は空間スピンの向きを表す) の 8 重項とスピン 3/2 の 10 重項 (↑↑↑) のバリオンを図 9.3 に示す．これらのクォーク成分と質量は

$$\frac{1}{2}^+ : p=(uud), \qquad n=(udd)$$
$$938 \qquad\qquad 940$$

$$\underset{1189}{\Sigma^+ = (uus)}, \quad \underset{1193}{\Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} s(ud+du)}, \quad \underset{1197}{\Sigma^- = (sdd)}$$

$$\underset{1315}{\Xi^0 = (uss)}, \quad \underset{1321}{\Xi^- = (dss)}$$

$$\underset{1116}{\Lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} s(ud-du)} \tag{9.24}$$

$$\frac{3}{2}^+ : \underset{1232}{\Delta^{++} = (uuu)}, \quad \Delta^+ = (uud), \quad \Delta^0 = (udd), \quad \Delta^- = (ddd)$$

$$\underset{1383}{\Sigma^{*+} = (uus)}, \quad \underset{1384}{\Sigma^{*0} = (uds)}, \quad \underset{1387}{\Sigma^{*-} = (ddd)}$$

$$\underset{1315}{\Xi^{*0} = (uss)}, \quad \underset{1321}{\Xi^{*-} = (dss)}$$

$$\underset{1672}{\Omega^- = (sss)} \tag{9.25}$$

である．

このようにクォークのフレーバー $(u, d, s, \cdots\cdots)$ の違いによって種々のハドロンを構成することができるので，この対称性をフレーバー SU(3) とよぶ．強い相互作用を別として一般に I_3 も Y （すなわち S）も保存しないから，フレーバー SU(3) は完全な対称性ではない．式 (9.21)，(9.22) および (9.24)，(9.25) に示した質量の値も同じ多重項の中で大きく異なっている．つまりフレーバー SU(3) は近似的にしか成り立たず，その限りではこれは単にハドロンの分類に対する目安を与えるだけであって，ゲージ対称性のような基本的対称性とは異なるものであることを注意しておく．

9.2 カ　ラ　ー

9.2.1 カラーの導入

前節で考察したハドロンのクォークモデルには問題点が残る．クォークからハドロンを作ることができるのならばなぜ (qq) とか $(qq\bar{q})$ のようなハドロン（これらをエキゾティック粒子とよぶ）がないのか，もっと単純に q，すなわちクォークそのものがなぜ発見されないのかという問題である．さらに，式(9.25) に現れた $\Delta^{++}=(uuu)$ という組合せは大きな問題を生む．これは三つの u についての対称な組合せであり，空間スピンはすべて上を向いて $J=3/2$ 粒子を作っているからスピンについても対称である．これは基底状態の粒子であるから全角運動量はゼロであり，空間についての波動関数も対称である．したがって波動関数は三つのクォークの任意の入れ換えに対して完全に対称である．一方，クォークはスピン 1/2 のフェルミオンだから全波動関数は粒子の入れ換えに対して反対称でなければならない．

これを救う最も簡単な方法は次の通りである．すなわちわれわれがまだ知らない新しい内部自由度があって，これを考慮すると全体で波動関数が反対称となっていればよい．この新しい内部自由度を**カラー**とよぶ．クォークには赤 (r)，青 (b)，緑 (g) の色の区別があり，この色の自由度について上の Δ^{++} の波動関数は完全反対称（すなわちカラー 1 重項）であるとする．赤，青，緑という言葉に絵画的描像を描く必要はないが，この色の選び方は 3 原色からきている．すなわち観測されるハドロンは 3 原色を一様に混ぜた無色（白）のものしかないとするのである．

クォークに新たに色の自由度を与え，クォークは色空間における カラー 3 重項であると仮定する．

$$q = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix} \qquad (q = u, d, s, \cdots\cdots) \tag{9.26}$$

実際に観測されるハドロンはすべてカラー1重項ということは，式 (9.26) の色ベクトルが色空間でどちらを向いていても外に現れる結果は変らないという対称性があることになる．これを**カラーSU(3)**とよぶ ($SU(3)_c$ と書く)．クォークを組み合せてハドロンを作るとき，結果としてカラー1重項が現れなければならない．フレーバーSU(3) の言葉をそのままカラーSU(3) に翻訳すると ($q\bar{q}$) については式 (9.16) より1重項があり，(qqq) については式 (9.23) より1重項がある．したがってこれらの組合せはハドロンとなり得る．

具体的には ($q\bar{q}$) のカラー1重項は

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}) \tag{9.27}$$

である．$\bar{r}$ は赤の“補色”を意味する．また (qqq) のカラー1重項は

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(rbg - rgb - brg + bgr - grb + gbr) \tag{9.28}$$

で与えられる．Δ^{++} の波動関数は $\psi = \psi_1$(スピン)$\times$ ψ_2(空間)$\times$ ψ_3(フレーバー)$\times$ ψ_4(カラー) であり，ψ_4(カラー) として式 (9.28) の完全反対称なものをとる．

一方，例えば (qq) に対しては

$$\begin{array}{ccccccccc} (qq) & = & \square & \times & \square & = & \begin{array}{c}\square\\[-4pt]\square\end{array} & + & \square\square \\ & & \underline{3} & \times & \underline{3} & = & \underline{3}^* & + & \underline{6} \end{array} \tag{9.29}$$

で，右辺には1が現れないからこのような組合せのハドロンは存在しない．エキゾティック粒子が存在しないことはこのように説明される．もっと単純にクォークそのものはカラー1重項ではないから，そのままハドロンとして外に出てくることはない．なお，フレーバーSU(3) と異なり，$SU(3)_c$ は厳密に成り

立つ完全な対称性である．

9.2.2 カラーSU(3)

式 (9.26) のクォーク3重項は局所 $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{c}$ 位相変換の下で

$$q \longrightarrow U(\boldsymbol{\theta})q, \qquad U(\boldsymbol{\theta}) = e^{-ig_\mathrm{s}\theta^a(x)\lambda_a/2} \tag{9.30}$$

と変換する．したがってクォークの局所位相変換不変なラグランジアンは

$$\mathscr{L}_\mathrm{color} = \bar{q}\gamma^\mu D_\mu q - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) \tag{9.31}$$

で与えられる．ここで共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_\mathrm{s}G_\mu, \qquad G_\mu = \frac{\lambda_a}{2}G_\mu^a \tag{9.32}$$

である．$G_\mu{}^a (a = 1, \cdots\cdots, 8)$ は $\mathrm{SU}(3)_\mathrm{c}$ のゲージ場であり，これを量子化して**グルーオン**を得る．$\mathrm{SU}(3)_\mathrm{c}$ は完全な対称性であるから自発的対称性の破れはなく，グルーオンの質量はゼロである．クォークとグルーオンの相互作用は式 (9.31) より

$$-ig_\mathrm{s}\bar{q}\gamma^\mu G_\mu q = -ig_\mathrm{s}\bar{q}\gamma^\mu\frac{\lambda_a}{2}q\cdot G_\mu^a \tag{9.33}$$

となる．g_s はクォークとグルーオンの結合定数であり，式 (9.33) が強い相互作用である．つまりクォークとクォークがグルーオンを交換したときの力が強い相互作用になる(図9.4)．図9.4(a) において $g^{i\bar{k}}$ の $\bar{k}$ は k の“補色”である．すなわち色 i が下方の q からグルーオンに沿って右に流れ，色 k が右から

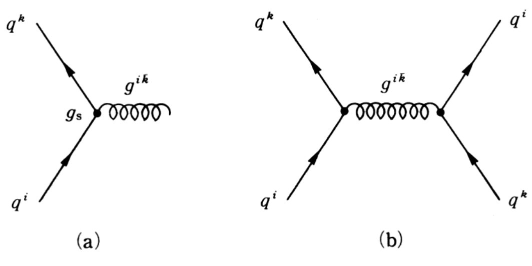


図 9.4　強い相互作用．(a) クォークとグルーオンの相互作用，(b) クォーク・クォーク散乱．



図 9.5　グルーオンの自己相互作用

グルーオンに沿って流れてきて色 k のクォークとなって上に移動している．このように強い相互作用は色交換の力学と見なすことができる．

式 (9.31) の第 2 項のグルーオンのラグランジアンは SU(2) の場合の式 (3.104) で与えたものと同じ形をもち，式 (3.101) にならって場の強さ $G_{\mu\nu}$ は

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g_s f_{abc} G^b_\mu G^c_\mu \quad (a, b, c = 1, \cdots\cdots, 8) \tag{9.34}$$

で与えられる．ここで f_{abc} は式 (9.14) で与えた SU(3) の構造定数である．グルーオンのラグランジアンはこの $G_{\mu\nu}$ の 2 乗で表されるから，グルーオンの自己相互作用 $(G_\mu)^3$ および $(G_\mu)^4$ を含んでいる(図 9.5)．

クォークとグルーオンの相互作用によって強い相互作用を記述する力学を**量子色力学** (QCD) とよぶ．このとき新たな問題が生じる．これは強い相互作用であるから $\alpha_3 = g_s{}^2/4\pi$ が 1 より十分小さいとはいえず，8 章で議論した QED のような摂動展開ができないので計算不能である，と一見思える．これを解決してくれるのが次に述べる漸近的自由である．

9.3 漸近的自由

8.6 節においてフォトンのプロパゲーターに対する高次の補正と，それによる電荷のくりこみについて考察し，8.7 節においてエネルギー依存性をもつ結合“定数”を求めた．同じことを QCD について考えよう．

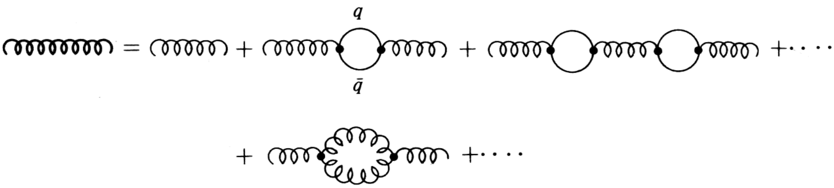


図 9.6 グルーオンのプロパゲーター

フォトンのプロパゲーターに対する電子・陽電子対の効果は図 8.11 で与えられる．これに対応する QCD におけるグルーオンのプロパゲーターに対する補正を図 9.6 に示す．QED の場合と異なり，クォーク・反クォーク対のほかにグルーオンのループも現れることに注意しよう．結合定数に対するこの寄与はフェルミオンのループによる寄与と逆符号になり，したがって全体として QED の場合と比べて結合定数のエネルギー依存性は異なってくる．

これを物理的に解釈するには 8.7 節で議論した真空偏極を見ればよい．図 8.13 に対応する QCD の真空偏極を図 9.7 に示す．図 9.7(a) においてクォークには $(q\bar{q})$ の対とグルーオンの雲がまわりを取り巻いている．図 8.13 と図 9.7(a) の最も大きな違いは何か．それはフォトンが電荷をもたず，中心の電荷を外に運ばないのに対して，グルーオンはそれ自体が色をもって

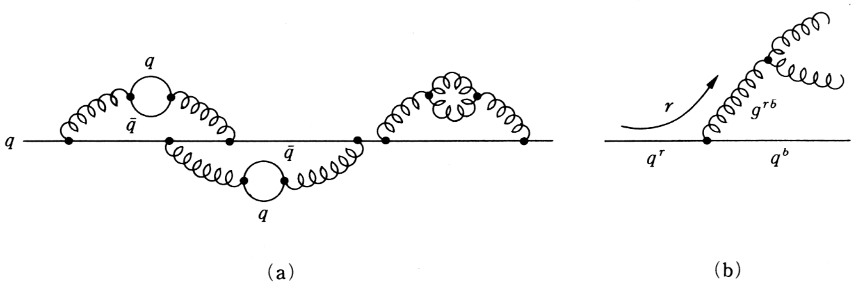


図 9.7 クォークとグルーオン場．(a) クォークによる真空偏極，(b) グルーオンによる色の持ち出し．

おり，グルーオンが中心のクォークの色の一部を外に運び出すことである（図 9.7(b)）．したがって電子電荷の場合とは逆に，十分遠くから見たときのクォークの色電荷を 1 とすると，探査棒を雲の十分内側に入れて（すなわち高エネルギーで）測定したときの色電荷は 1 よりずっと小さくなる．電磁相互作用の強さを表すのが電荷 e であったように，強い相互作用の強さを表すのが色電荷 (g_s) であるから，結局強い相互作用の結合定数 $\alpha_s = g_s{}^2/4\pi$ はやはりエネルギーの関数 $\alpha_s(Q^2)$ となるが，この場合 $\alpha_s(Q^2)$ は Q^2 が大きくなると小さくなる．実際，QED の場合の式（8.90）に対応する QCD の $\alpha_s(Q^2)$ に対する式はクォークのフレーバーの数を n_f として

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1+[\alpha_s(\mu^2)/4\pi][11-(2/3)\,n_f]\log(Q^2/\mu^2)} \quad (9.35)$$

で与えられる[1]．式（9.35）において分母の＋11 がグルーオンのループによる寄与である．$n_f=6$ と選ぶと $(11-2n_f/3)>0$ であるから $\alpha_s(Q^2)$ のふるまいは図 9.8 のようになる（図 8.12 と比較せよ）．

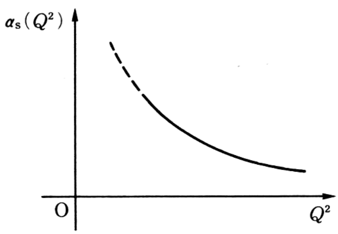


図 9.8　強い相互作用の結合“定数”

したがって強い相互作用は近距離，あるいは高エネルギーになるほど弱くなり，十分大きなエネルギーでは $\alpha_s(Q^2)\ll 1$ となって QED と同様の摂動計算が可能となる．これを**漸近的自由**（asymptotic freedom）とよぶ．

逆に Q^2 が十分小さいとき，つまり遠距離になると図 9.8 より $\alpha_s(Q^2)$ は大きくなる．すなわちクォーク間相互作用は距離とともに強くなり，ハドロンの $(q\bar{q})$ あるいは (qqq) から一つ

のクォークを自由粒子として外に取り出すには無限大のエネルギーが必要となる．これが自然界にクォークが単独に存在しない理由である．これを**クォーク閉じ込め**という，といって証明できたように見えるが，実はこれは正しくない．式 (9.35) は摂動計算による結果であるから $\alpha_s(Q^2) \gtrsim 1$ のときはそもそも使えない．図 9.8 のグラフにおける左側の点線はその意味で書いてある．クォーク閉じ込めの問題は現在，素粒子論に残された課題の一つである．これについては 12 章で再び議論する．

グルーオンは色の 8 重項であるから，これもそのまま自由粒子として外に出てくることはない．しかしグルーオンとグルーオンの結合状態を考えると

$$\underline{8} \times \underline{8} = \underline{1} + \underline{8} + \underline{8} + \underline{10} + \underline{10}^* + \underline{27} \tag{9.36}$$

より，右辺にはカラー 1 重項があるからこれは自由粒子として存在可能である．これを**グルーボール**とよぶが現在のところ実験で検出されてはいない．もし検出されるならばこれは QCD の直接検証となるであろう．

参考文献

1) Cheng, T. P. and Li, L. F.: Gauge theory of elementany particle physics (Clarendon, 1984).
2) Halzen, F. and Martin, A. D.: 前出．

10 ハドロンの現象論

10.1 ハドロンの構造

地球の表面から深い井戸を掘って井戸の底で重力を測るとどうなるかを考える（図 10.1）．ガウスの法則を用いると答はただちに求められ，中心から距離 r における重力加速度は

$$g(r) = g_0 \frac{R^2}{r^2} \frac{1}{M} \int_0^r \mathrm{d}^3 r' \rho(r') \tag{10.1}$$

となる．$\rho(r)$ は r における密度，M は地球の全質量，R は地球半径，g_0 は地表における重力加速度の大きさを表す．特に $\rho(r) =$ 一定とすると $r < R$ のとき $g = g_0 r/R$ となり，重力は地球の中心からの距離に比例する．式（10.1）は重力の大きさが距離の関数であることを示しており，8.7 節の結合"定数"と同

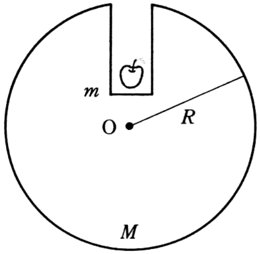


図 10.1　地球内部の重力

じ意味をもつ．逆に，いろいろな r における重力の大きさを測定すれば地球内部の密度分布，すなわち地球の構造がわかることになる．

もう一つの例として，19 世紀末から 20 世紀初頭にかけての原子の構造の探究の歴史がある．原子から電子が飛び出すことから原子内には電子が含まれることがわかる．一方，原子は全体として中性であるから，電子の負電荷を打ち消す正の電荷が存在しなければならない．J. J. Thomson は正の電荷の海の中に電子が泳いでいるモデルを作った．それに対してRutherford は，中心に正電荷が局在し，そのまわりを電子が回っているモデルを考え，実際に α 粒子を金箔に衝突させてその散乱を調べることによって，このモデルが正しいことを示した (図 10.2)，すなわち散乱実験で原子の構造に対する知識が得られた．

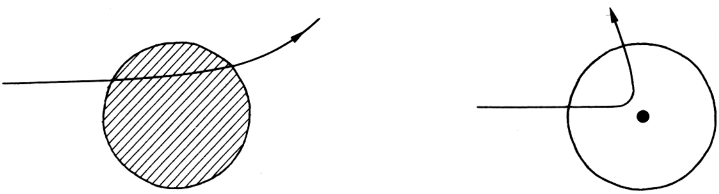

(a)　(b)

図 10.2　原子の構造．(a) トムソンのモデル，(b) ラザフォードのモデル．

上の二つの例をハドロンに応用すると，ハドロンの構造を見るには高エネルギー散乱の実験をすればよい，ということになる．高エネルギーになるほどハドロンのより深い中心部の構造を見ることができる．そのとき，もしラザフォード散乱のように大角度の散乱が見つかれば，ハドロンの構成要素の一つに衝突したと解釈できる．

10.2　パートンモデル

素粒子の散乱の例として**深非弾性 *ep* 散乱**をとって見よう．こ

れは標的の陽子に高エネルギーの電子を衝突させ，終状態に多くのハドロンを生成させる反応である（図 10.3）．特に終状態が陽子 1 個であれば弾性散乱であるが，一般にハドロンの多重生成を考えているのでこれは非弾性散乱である．“深”については以下で説明する．図 10.3 においては入射電子が virtual フォトンを放出し，このフォトンが陽子の奥深く入り込んで相互作用を起こしている．ラザフォード散乱における α 粒子の役割をこのフォトンが果しているといってよい．ちょうど α 粒子が金の原子核に衝突・散乱されたように，もし陽子に何か構成要素があるならば，フォトンはこれと衝突・散乱を行うであろう．この構成要素を**パートン**とよぶ．パートンそのものの構造は考えない．つまりパートンは点粒子とする．

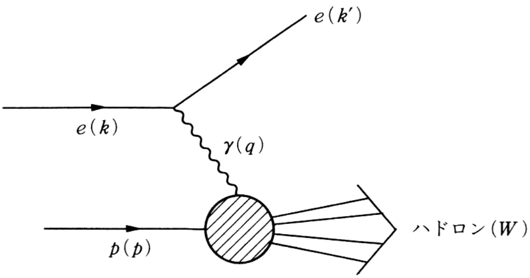


図 10.3　深非弾性 ep 散乱

フォトンとパートンの相互作用について考えよう．図 10.3 は陽子と virtual フォトンの散乱と見なせる．これをローレンツ変換によって陽子の運動量 p が非常に大きな値をもつ系に移って考えると，特殊相対論によって $p\to\infty$ では時間の遅れの因子がいくらでも大きくなり，陽子内のパートンどうしの相互作用の反応度は極端に小さくなる．したがって各パートンはほとんど自由粒子のようにふるまい，陽子はパートンのインコヒーレントな（互いに相関をもたない）集合と見なすことができる．フォトンはこの自由パートンと瞬間的に相互作用を行う．ブーストの方向と垂直な運動量成分 p_T はローレンツ変換によらず小さな値にとどまるからこれを無視すると，一つのパ

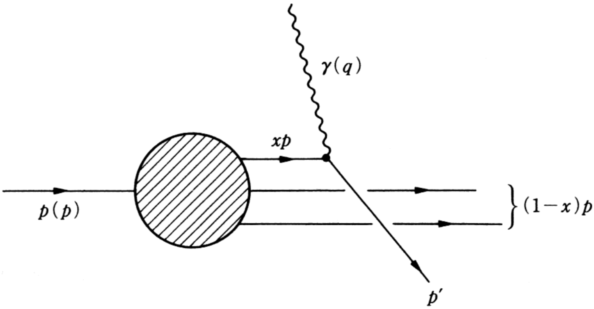


図 10.4　フォトンとパートンの散乱

ートンの運動量は xp $(0\leq x\leq 1)$ と書ける．

フォトンとパートンの散乱を図 10.4 に示す．図 10.4 において，運動量 xp をもった一つのパートンとフォトンが衝突して運動量 p' のパートンになっている．このとき $(xp+q)^2=p'^2$，すなわち $x^2p^2+2xp\cdot q+q^2=p'^2$ であるが，高エネルギー散乱を考えているから x^2p^2 と p'^2 は無視できて

$$2p\cdot q\,x+q^2=0 \tag{10.2}$$

となる．$q=(\nu,\boldsymbol{q})$ とおくと陽子の静止系で $2p\cdot q=2M\nu$ (M は陽子質量) であるから式 (10.2) は

$$x=Q^2/2M\nu \tag{10.3}$$

と書ける．$Q^2=-q^2$ は電子の運動量移動の 2 乗，ν は virtual フォトンの陽子静止系におけるエネルギーである．

図 10.3 のブラックボックスを決めるのはどのようなフォトンをぶつけたか，それによってどのようなハドロンが生成されたか，であるから Q^2 と $W^2=(p+q)^2=M^2+2M\nu-Q^2$ を与えると決まる．すなわち陽子の構造を決定する**構造関数** F は Q^2 と ν の関数となり $F=F(Q^2,\nu)$ と書ける．ところが式 (10.3) により，Q^2 と ν は独立ではなく，その比 x だけが変数として残る．

$$F(Q^2,\nu)=F(x),\qquad x=Q^2/2M\nu \tag{10.4}$$

式 (10.4) を**ブジョルケンのスケーリング則**とよぶ．

高エネルギー散乱では電子質量は無視できるから

$$\begin{aligned} Q^2 &= -(k-k')^2 \fallingdotseq 2k\cdot k' \fallingdotseq 2EE'(1-\cos\theta) \\ \nu &= E-E' \end{aligned} \tag{10.5}$$

である．ただし初期状態と終状態の電子エネルギーをそれぞれ E, E'，散乱角を θ とおいた．E, E' および θ は実際に実験で決まる観測量であるから Q^2 と ν，したがって x も観測から決まる．

散乱断面積を構造関数 $F(Q^2, \nu)$ で表し，いろいろな Q^2 と ν の値に対する断面積の実験結果を調べると，たしかにスケーリング則が成り立っていることがわかった．したがって陽子はパートンの集合と見なしてよい．

$x=0$ は $Q^2=0$，すなわち実フォトンによるハドロンの光生成に対応する．一方 $x=1$ は $W^2=(p+q)^2=M^2+2M\nu-Q^2=M^2$，すなわち終状態が陽子の ep 弾性散乱に対応する．これに対して Q^2, ν がともに十分大きく，かつ有限な x の領域を深非弾性散乱とよぶ．

以上をまとめると次のようになる．深非弾性 ep 散乱の実験を行うことによって種々の x に対する遷移確率を調べると，陽子中でどのようなパートンがどのように分布しているか，すなわち陽子の構造がわかることになる．

パートンとは実際何か．まずはクォークである．しかしクォークのまわりにはグルーオンが取り巻いており，グルーオンはクォーク・反クォークの対生成・対消滅を行う（図 9.7(a)）．この小さな運動量をもった（$x \ll 1$）クォーク・反クォークの集合をクォークの海とよぶ．それに対して陽子の量子数を決めるクォーク（uud）を価（valence）クォークとよぶ．陽子に限らず一般にハドロンは価クォーク ＋ 海クォーク ＋ グルーオンからなっている．

図 10.4 においてハドロンの終状態を見ると，一見一つのクォークが外にはじき飛ばされ，残りの二つのクォークが別の方向に進むように見える．しかしクォーク間の距離が大きくなる

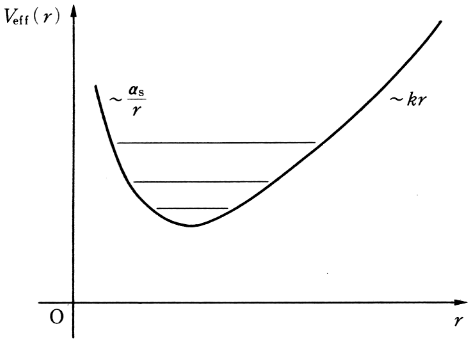


図 10.5　クォーク間有効ポテンシャルとクォーコニウムスペクトル

と漸近的自由の近似は成り立たず，クォーク間には強い相互作用によってグルーオンおよびクォーク・反クォーク対が多数作られ，問題は単純ではなくなる．

クォークとその反クォークから作られる束縛状態を**クォーコニウム**とよぶが，その現象論は，クォーク間の有効ポテンシャルを

$$V_{\mathrm{eff}}(r)=\frac{\alpha_s}{r}+kr \tag{10.6}$$

の形に選ぶと，少なくとも第1近似としてクォーコニウムの質量スペクトルをうまく説明できる（「有効」(effective) ポテンシャルという言葉はある原理から導き出されたものでなく，実質的にこれで現象が説明できるという意味で用いる）．式(10.6) において第1項は電磁相互作用の場合のクーロン・ポテンシャルに対応する．一方第2項がクォーク閉じ込めに寄与する（図 10.5）．

クォーク間距離が十分離れたとき距離に比例するエネルギーをもつということはクォーク間の色力線（電磁場の場合の電気

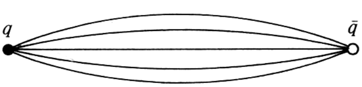


図 10.6　クォーク間の色力線

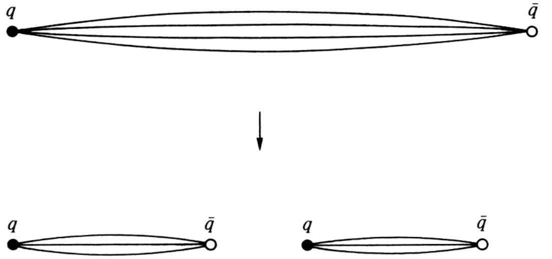


図 10.7 クォーク・反クォークの対生成

力線に対応してこうよぶ）がクーロン力の場合の電気力線のように空間に広がらず，クォーク間を結ぶ直線に沿って束のようになると考えると理解できる（図 10.6)．力線の密度が場の強さを与え，場の強さの 2 乗がエネルギー密度になることを思い出すと，力線の束の断面積が一定であれば全エネルギーはクォーク間の距離に比例する．

このとき，さらにクォーク間の距離を広げると，色力線を途

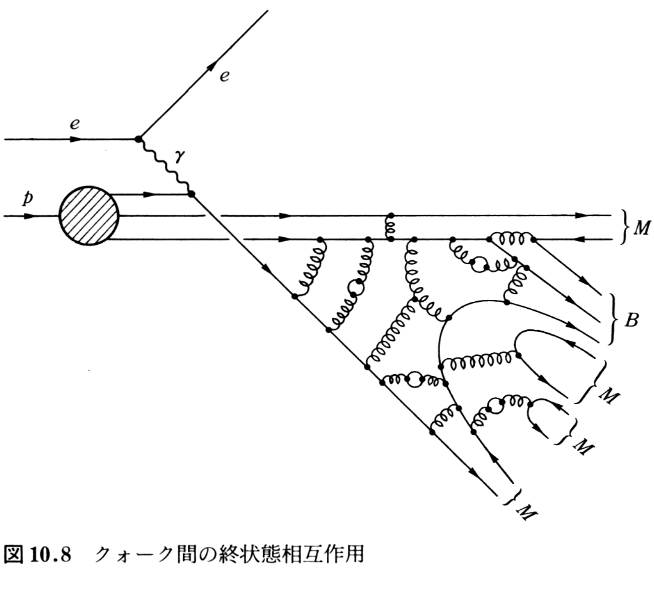


図 10.8 クォーク間の終状態相互作用

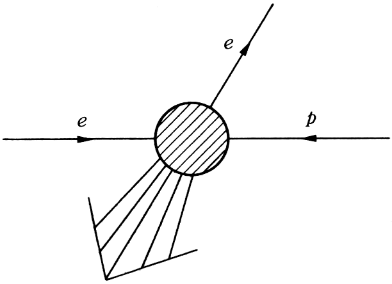


図 10.9　ハドロンジェットの対生成

中で切断してクォーク・反クォークの対生成を行った方がエネルギー的には有利である（図 10.7）．結果としてこれはメソンの生成になっている．元に戻って図 10.4 の終状態は実際は図 10.8 のようになり，最終的にはメソンおよびバリオンの多重生成が観測される．これを**ハドロンのジェット**とよぶ．すなわち加速器実験における実際の反応は図 10.9 のようになる．

10.3　重いクォーク

10.3.1　共 鳴 状 態

素粒子のうちフォトン，電子，陽子，およびニュートリノの四つは安定粒子である．ただしこのうちの陽子は，12.2 節で述べる大統一理論ではメソンおよびレプトンに崩壊する可能性は残っている．現在のところの陽子の寿命はモデルと独立に 10^{25} 年以上である．またニュートリノについても，もしこれが微小な質量をもてば 11.4 節で述べるニュートリノ振動によってフレーバーの異なるニュートリの間の遷移が起こる可能性がある．この四つを除いて他のすべての素粒子は有限の寿命をもって崩壊する．例えば中性子は約 10^3 秒で β 崩壊をする．π^0 は 10^{-16} 秒で二つのフォトンに崩壊する．これらの不安定粒子の波動関数がどのように記述されるかを見てゆこう[1)]．

　量子力学においてエネルギー E をもつ粒子の波動関数は

$\psi(t)=\psi(0)e^{-iEt}$ の形をもつ．もし E が実数であればその存在確率は $|\psi(t)|^2=|\psi(0)|^2$ となって時間に依存せず，これは安定粒子に対応する．エネルギー E に小さな虚数部分を与えると

$$E = E_R - i\frac{\Gamma}{2}$$
$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-\Gamma t} \tag{10.7}$$

となるから，これは寿命 $\tau=1/\Gamma$ の不安定粒子に対応する．フーリエ変換をとって

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\ \psi(t)\,e^{iEt}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi(0)\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}t\ e^{i(E-E_R)t-\Gamma t/2}\\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\psi(0)\frac{1}{E-E_R+i\Gamma/2}\\ |\tilde{\psi}(E)|^2 &= \frac{|\psi(0)|^2}{2\pi}\frac{1}{(E-E_R)^2+(\Gamma/2)^2}\end{aligned} \tag{10.8}$$

が得られる．ここで $t<0$ のとき $\psi(t)=0$ とおいた．すなわち $t=0$ に粒子が生成されたとしている．式 (10.8) より，不安定粒子の存在確率はエネルギーの関数として**ブライト-ウィグナー型の共鳴曲線**となり，その幅の逆数が粒子の寿命を与えることがわかる（図 10.10）．この意味で一般に不安定粒子を**共鳴状態**とよぶ．

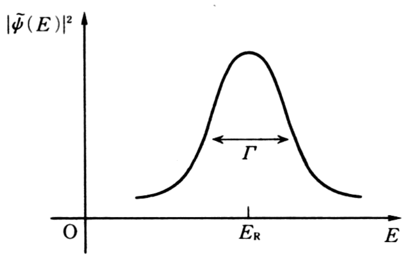


図 10.10 不安定粒子の共鳴曲線

共鳴状態は不安定であるから，例えば散乱過程で中間状態に現れ，終状態には別の粒子として観測される．例として e^+e^- 衝突による ρ ($J^P=1^-$) の生成とその崩壊を図 10.11 に与える．

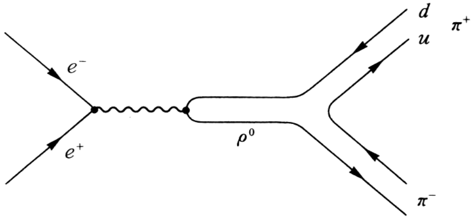


図 10.11　ρ の生成と崩壊

e^+e^- の全エネルギーとして $m_\rho=770$ MeV の近傍のみを考えるから計算は非相対論的な量子力学の式を用いてよい．

量子力学におけるスピン・ゼロの 2 粒子の弾性散乱を考える．散乱振幅 $f(\theta)$ の部分波展開は

$$f(\theta) = \frac{1}{2ip}\sum_l (2l+1)(e^{2i\delta_l}-1)P_l(\cos\theta) \tag{10.9}$$

と書ける．δ_l は l 波の位相のずれである．散乱断面積 σ は

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{p^2}\sum_l (2l+1)|e^{2i\delta_l}-1|^2 = \frac{4\pi}{p^2}\sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l \tag{10.10}$$

となるから $\delta_l=\pi/2$ のとき σ は極大となる．すなわち，ある l_1 に対して $\delta_{l_1}(E_R)=\pi/2$ を満足する $E=E_R$ で共鳴状態をもつ．

$$e^{2i\delta_l}-1 = 2ie^{i\delta_l}\sin\delta_l = \frac{2i\sin\delta_l}{e^{-i\delta_l}} = \frac{2i\sin\delta_l}{\cos\delta_l - i\sin\delta_l}$$

$$= \frac{2i}{\cot\delta_l - i}$$

と変形する．$E=E_R$ のとき $\delta_{l_1}=\pi/2$ とおいて $\cot\delta_{l_1}(E)$ のテイラー展開は

$$\cot\delta_{l_1}(E) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\cot\delta_{l_1}(E_R)} + (E-E_R)\frac{d}{dE}\cot\delta_{l_1}\Big|_{E=E_R} + \cdots\cdots$$

となるが，ここで $(d/dE)\cot\delta_{l_1}|_{E=E_R}\equiv -2/\Gamma$ とおいて式 (10.10) に代入すると（l の和のうち，l_1 だけをとって）

$$\sigma(E) \simeq \frac{4\pi}{p^2}(2l_1+1)\frac{(\Gamma/2)^2}{(E-E_R)^2+(\Gamma/2)^2} \tag{10.11}$$

となり，ブライト-ウィグナー型の共鳴となる．弾性散乱以外の場合には式（10.11）を一般化すればよい．

以上をまとめると次のようになる．散乱実験を行って断面積のエネルギー依存性を調べ，ブライト-ウィグナー型の共鳴曲線が得られれば，山の位置 $E=E_R$ から共鳴状態の質量が $M_R=E_R$ と求められ，また，共鳴の半値幅 Γ からこの粒子の寿命が $\tau=1/\Gamma$ と求められる．

例えば $e^+e^-\to\rho^0\to\pi^+\pi^-$ から，$M_\rho=769.9\pm0.8$ MeV, $\Gamma_\rho=151.2\pm1.2$ MeV が得られる．他の共鳴状態についても同様に求めることができる．

特に 6 章で導入した弱・電磁相互作用のゲージ粒子である W と Z についてその質量と幅を与えておこう．Z については，例えば e^+e^- 衝突から $e^+e^-\to Z\to\mu^+\mu^-$ によって得られ[2)]，

$$\begin{aligned} M_Z &= 91.187\pm0.007\ \text{GeV} \\ \Gamma_Z &= 2.490\pm0.007\ \text{GeV} \end{aligned} \tag{10.12}$$

である．ただし式 (10.12) における Γ は全幅（崩壊モードのすべてについての和）である．W については例えば pp 散乱を用いる．10.2 節で述べたように陽子は価クォーク（uud）と海クォーク（$u\bar{u}+d\bar{d}+\cdots\cdots$）およびグルーオンからなっているから，一方の陽子中の u と他方の陽子中の $\bar{d}$ が衝突し，$u\bar{d}\to W^+\to e^+\nu_e$ の反応が起こる．これから W に対する値として

$$\begin{aligned} M_W &= 80.22\pm0.26\ \text{GeV} \\ \Gamma_W &= 2.08\pm0.07\ \text{GeV} \end{aligned} \tag{10.13}$$

と求められる．

10.3.2 チャーム

新しい粒子の探索は上で見たように原理的には散乱実験を行って共鳴の有無を見ればよいことがわかった．1974 年に e^+e^- 衝突によって発見された新しい共鳴状態 ψ(J/ψ とも書く）は次のような値をもっていた．

$$M_\psi = 3096.88 \pm 0.04\ \mathrm{MeV}$$
$$\Gamma_\psi = 88 \pm 5\ \mathrm{keV} \qquad (10.14)$$

式 (10.14) の Γ の値は例えば通常のハドロンの共鳴状態である ρ の幅 150 MeV と比べて 3 けたも小さい．したがって，これはこれまでにない何か新しい素粒子に分類されるべきものであると考えられる．はたしてその本体は何か．

ここで 9.1 節で考察したハドロンのクォークモデルを再び考えよう．$J^P=1^-$ メソンのうち ϕ^0(1020 MeV) は $s\bar{s}$ の束縛状態と考えられるが，その崩壊モードのうち K^+K^- または $K^0\bar{K}^0$ へは 83% なのに対して $\pi^+\pi^-\pi^0$ への崩壊は 2.5% しかない．これを説明するために崩壊のクォーク図を書くと図 10.12 のようになる(図 10.12 はファインマン図ではない．反応をクォーク線を用いて模式的に表したものにすぎない．以下の図も同様)．図 10.12 の(a)と(b)の違いは何か．(a) では初期状態と終状態でクォークの線がつながっているのに対して，(b) では初期状態と終状態でクォークの線が分断されている．(a) は許される過程であるが，(b)は禁止過程であるとすれば，$\Gamma(\phi^0\to K^+K^-) \gg \Gamma(\phi^0\to\pi^+\pi^-\pi^0)$ を説明できることになる．これを **OZI**(大久保-ツヴァイク-飯塚)**則**とよぶ．

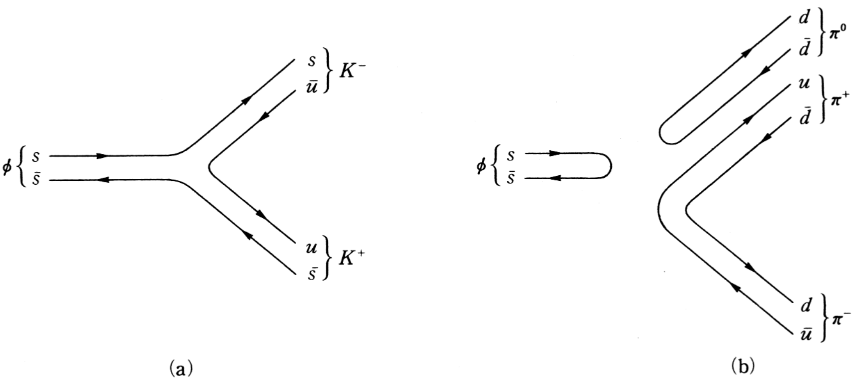


図 10.12　ϕ の崩壊とクォーク図

ψ 粒子に戻ると Γ_ψ が極端に小さいということは，ψ が新しいクォークから作られており，OZI 則のために終状態に u, d, s からなる通常のハドロンを作る過程が禁止されているためであると考えれば理解できる（図 10.13(a)）．この新しいクォークを c (charm，チャーム) クォークと名づける．ψ は $(c\bar{c})$ の束縛状態でチャーモニウムとよばれる．これは 10.2 節で述べたクォーコニウムのうちの一つである．図 10.13(a) は図 10.12(b) に対応している．では図 10.12(a) に対応するのは何か．新しいクォーク c を導入したから c を含む新しいメソンが考えられる．これらは

$$D^+(c\bar{d}),\quad 1869.4\pm0.4\ \mathrm{MeV},\quad D^-(\bar{c}d)$$
$$D^0(c\bar{u}),\quad 1864.6\pm0.5\ \mathrm{MeV},\quad \bar{D}^0(\bar{c}u)$$
$$D_s{}^+(c\bar{s}),\quad 1968.5\pm0.7\ \mathrm{MeV},\quad D_s{}^-(\bar{c}s)$$

である．したがって図 10.12(a) に対応して図 10.13(b) のような図が考えられるが，$m(\psi)<m(D^+)+m(D^-)$ であるからエネルギー的に不可能である．結局 ψ は弱い相互作用によってしか崩壊できず，その幅は小さくなる．Γ が小さいことは寿命が長い，すなわち相互作用が弱いことに対応する．チャーム粒子の弱い相互作用については 11.1 節で議論する．

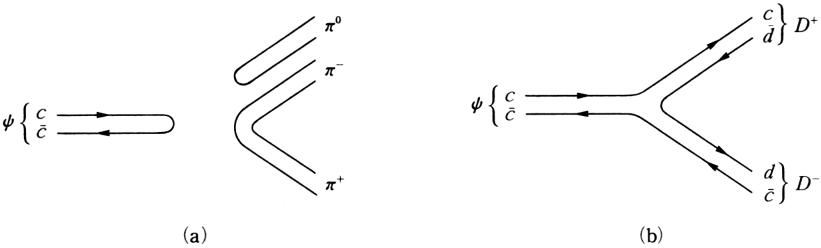


図 10.13 チャーモニウムとその崩壊

実際に c クォークの生成が起こっていることを確かめるにはどうすればよいか，すなわち図 10.14 のようなファインマン図で表される散乱断面積はどのようにふるまうか．これは 8.5

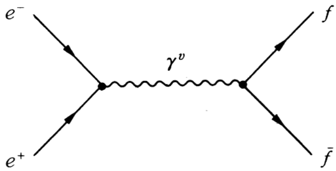


図 10.14　フェルミオン f の対生成

節で計算した電子・陽電子の対消滅である．したがって式 (8.62) で与えられる $\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)\equiv\sigma_{\mu\mu}$ において μ の代りにフェルミオン f を代入すればよい．この際，唯一の変更として μ^+ の電荷 e の代りに f の電荷 Q_fe をとればよいから，結局

$$R(s)\equiv\frac{\sigma(e^+e^-\to f\bar{f})}{\sigma_{\mu\mu}}=\sum_{m_f<\sqrt{s}/2}Q_f{}^2 \qquad (10.15)$$

の $R(s)$ を調べることに帰着する．式 (10.15) において Σ 記号は与えられた全エネルギーが $f\bar{f}$ のしきい値を超えている場合 ($s>(2m_f)^2$) のすべての f をとることを意味する．f には一般にレプトンも含まれるので，ここでは特に終状態としてハドロンをとり，f はクォークのみを考える．クォークは SU(2) の 2 重項の上成分については電荷が $(2/3)e$，下成分は $(-1/3)e$ であるから，u, d, s までならカラーの 3 倍を考慮して

$$R_{u,d,s}=3\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]=2 \qquad (10.16)$$

である．$\sqrt{s}$ が 3.1 GeV になるとチャーモニウムの生成のために共鳴が起こり，$R(s)$ はここで非常に大きな値をとる．ψの幅は非常に小さいので $\sqrt{s}$ を GeV 単位で測っていると実際はグラフに山形は見えずデルタ関数のようにふるまう．$\sqrt{s}>3.1$ GeV では式 (10.15) の和には新たに c クォークの寄与が入り，c の電荷が $(+2/3)e$ であれば

$$R_{u,d,s,c}=2+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{10}{3} \qquad (10.17)$$

になると予想される．実際，式 (10.16)，(10.17) が成り立つことが実験によって確かめられた(図 10.15)．なお，図 10.15 では，第 3 世代のレプトンである τ (1777 MeV) の対生成のた

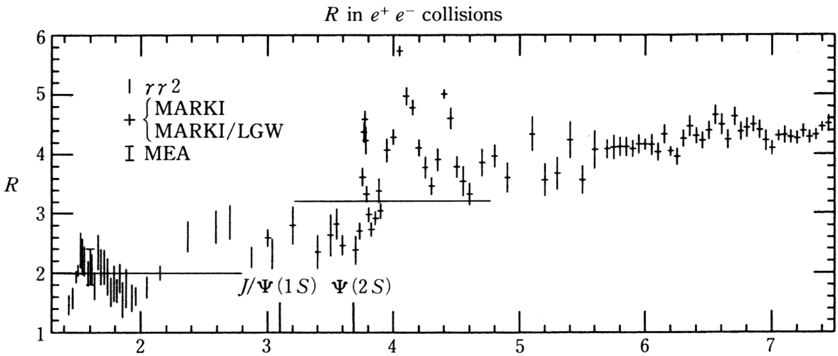


図 10.15 $R(s)=\sigma(e^+e^-\to X)/\sigma_{\mu\mu}$，横軸は $E_{\rm CM}$[GeV]．グラフの水平線は $R=2$ および 10/3 を表す．(*Review of Particle Properties*, Phys. Rev. **D50**, 1334(1994).)

めに，$\sqrt{s}>3.5$ GeV で R の値がさらに 1 増大している．

第 1 世代のクォーク 2 重項が $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ であるから，ここで見つかった c を s クォークと組み合せて $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ を第 2 世代のクォーク 2 重項と見なすことができる．これについては 11.1 節で再び議論する．

10.3.3 ボトム

e^+e^- 衝突においてさらにエネルギーを上げてゆくと，9.5 GeV 付近で再び幅の小さな共鳴が得られ，その後 R は 11/3 の値をとる．チャームの場合とまったく同じ議論で，電荷 $(-1/3)e$ の新しいクォークが生成され，9.5 GeV の共鳴はこのクォークの対によるクォーコニウムと解釈できる．このクォークを b (bottom，ボトム) クォークと名づける．また，この $b\bar{b}$ から作られるクォーコニウムを Υ (ウプシロン) とよぶ．

$$M_\Upsilon = 9460.37\pm0.21 \text{ MeV}$$
$$\Gamma_\Upsilon = 52.5\pm1.8 \text{ keV} \tag{10.18}$$

b クォークを含む新しいメソンは B メソンとよばれる．

$$B^+=(u\bar{b}),\quad B^-=(\bar{u}b),\quad B^0=(d\bar{b}),\quad \bar{B}^0=(\bar{d}b):$$
$$5279\pm2 \text{ MeV}$$

$$B_s{}^0=(s\bar{b}),\quad \bar{B}_s{}^0=(\bar{s}b):\qquad 5375\pm6\ \mathrm{MeV}$$

b クォークは第3世代のクォークであるから，これを含む B メソンは，後に述べる CP の破れの検証に使われる可能性があるため，現在注目を浴びている．

10.3.4 トップ

b クォークが第3世代のクォーク2重項の1成分であるとすると，そのパートナーである電荷 $(+2/3)e$ のクォークが欲しくなる．これを t（top，トップ）クォークと名づける．t クォークが発見されれば表1.1が完成する．t クォークの存在は単に美的バランスだけの問題ではない．本書でくわしく述べる余裕はないが，クォーク2重項を考える第1の理由は，第3世代が b だけとすると理論に**アノマリー**が現れ，ゲージ理論の量子化がうまくゆかなくなることである．アノマリーが生じないためには，どうしても第3世代が，第1，第2世代と同じようにレプトンとクォークの2重項という構造をもってほしい．レプトンの第3世代の2重項 $\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}$ はすでに確定されているから，クォークの方も2重項でなければならない．第2の理由は11.1節で述べる FCNC を除去するためである．

さらに7章で述べたヒッグス機構において，ゲージ理論を現実のものにするためにはヒッグス粒子の存在が不可欠であるが，7.4節の終りで議論したようにヒッグス粒子とフェルミオンの結合定数はフェルミオンの質量に比例する．したがってヒッグス粒子を見つけるには最も重いトップを見つけ，その反応を調べることが最良の方法であるといえる．非常に楽観的な言い方をすれば，トップを見つければヒッグスが見つかり，ゲージ理論が完成したということになる．

e^+e^- 衝突でトップを探すには式(10.15)の R を調べればよい．トップの電荷は $(2/3)e$ であるから，$(t\bar{t})$ のしきい値を超えたとき

$$R_{u,d,s,c,b,t} = 3\times3\times\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] = 5 \tag{10.19}$$

となる．式 (10.19) において最初の 3 はカラー，2 番目の 3 は世代の数である．現在のところ，$\sqrt{s}=55$ GeV までの e^+e^-衝突実験において $R=5$ には達していない．一方 $p\bar{p}$ 衝突ではビームのエネルギーが 1 TeV＝10^3 GeV の実験が現在可能であるが，これはハドロン散乱であるために e^+e^- のように単純な解析はできない．1994 年にアメリカの FNAL（国立フェルミ研究所）の加速器実験で $\sqrt{s}=1.8$ TeV の $p\bar{p}$ 実験を解析した結果，$m_t=174$ GeV という数値を得ている（1 章の文献 1）を参照）が，はたしてこれが本物かどうか議論の分れるところである．

なお世代数は 3 で終りであることがわかっている．e^+e^- 衝突における Z^0 生成を考える．Z はクォークまたは荷電レプトンの対に崩壊すると同時にニュートリノ対にも崩壊する．このニュートリノは荷電粒子と異なり検出器を通過して飛び去ってしまう．この検出できない (invisible) モードへの崩壊幅を Γ_{inv} と書くと，ニュートリノの世代数 N_ν は

$$N_\nu = \frac{\Gamma_{\text{inv}}}{\Gamma_\nu} \tag{10.20}$$

と表せる．ここで Γ_ν は標準モデルから計算される一つのフレーバーのニュートリノへの崩壊幅である．実験結果は，$N_\nu=2.985\pm0.023\pm0.004$ である[3]．1 番目の誤差は統計誤差と系統誤差であり，2 番目の誤差はトップクォークの質量が未確定のための補正である．N_ν は当然整数であるから $N_\nu=3$ が結論される．アノマリーが出ないためにはクォークの方も第 3 世代で終りである．

10.4 標準モデルのパラメータの値

素粒子の標準モデルは $SU(2)\times U(1)_Y\times SU(3)_C$ によって表さ

れる．このモデルに現れる種々のパラメータの値について調べる．

10.4.1　微細構造定数 α

電磁相互作用の強さを決める微細構造定数 $\alpha=e^2/4\pi$ は水素原子におけるエネルギー準位の差 $\Delta E=E(2^3\mathrm{P})-E(2^1\mathrm{P})$ から求められる．もともとこれを水素原子の微細構造とよぶが，これは摂動計算で $\Delta E=(1/32)\,m_e\alpha^4[1+O(\alpha^2)+\cdots\cdots]$ と求められる[4]．これを実験値と比較することによって

$$\alpha^{-1}=137.0359895\pm 0.0000061 \tag{10.21}$$

が得られる．

10.4.2　ワインバーグ角 θ_W

ワインバーグ-サラム・モデルにおける SU(2) と $\mathrm{U(1)_Y}$ の結合定数の比を与える θ_Wの値は種々の方法で決めることができる．まず式(6.26)の中性カレントに現れる θ_W は $\nu_\mu p\to\nu_\mu X$，$e^+e^-\to Z\to\mu^+\mu^-$ 等の Z 交換の過程の実験値を理論と比較することによって求められる．また，式 (7.42) より M_W と M_Z の質量比から求められる．さらに式 (6.31) から四体フェルミ相互作用の強さ G_F を与えると M_W を用いて θ_W を決めることができる．これらの方法で決まる θ_W は

$$\sin^2\theta_\mathrm{W}=0.2319\pm 0.0005 \tag{10.22}$$

という値をとる．

10.4.3　g_1　と　g_2

θ_W が求められると $\mathrm{U(1)_Y}$ と SU(2) の結合定数である g_1 と g_2 は式 (6.23) を用いて決めることができる．結果は

$$\alpha_1=g_1{}^2/4\pi\sim 0.00950,\qquad \alpha_2=g_2{}^2/4\pi\sim 0.0315 \tag{10.23}$$

である．

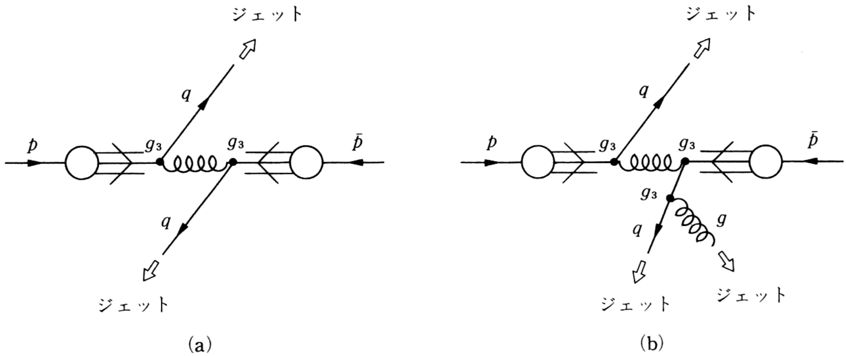


図 10.16　(a) 2 ジェット過程と (b) 3 ジェット過程

10.4.4　g_3

強い相互作用である SU(3)$_c$ の結合定数 g_3 (9.2.2 項ではこれを g_s と書いた) の値を決めるのは難しい．なぜならクォークおよびグルーオンの素過程 (qq, qg, gg 散乱等) に対して $\alpha_3 = g_3^2/4\pi$ が与えられるが，実際の反応はこれらを複雑に含んだハドロン散乱しかないからである．例えば $p\bar{p}$ の衝突実験を行ってクォークによるハドロンの 2 ジェット過程とグルーオンを含んだ 3 ジェット過程を比較する (図 10.16)．振幅についてみると (a) は g_3^2，(b) は g_3^3 に比例するから，反応度は $1 : \alpha_3$ となるはずである．したがって 2 ジェット過程と 3 ジェット過程の反応度の比から α_3 の情報が得られることになるが，これではとても式 (10.21) のような精度は望むべくもない．ここで述べた反応度の比から得られる α_3 の値は 10 GeV の近くで

$$\alpha_3 = g_3^2/4\pi \sim 0.15 \tag{10.24}$$

となる．式(10.23)と式(10.24)より，10 GeV 近傍では

$$\alpha_1 \ll \alpha_2 \ll \alpha_3 \tag{10.25}$$

であることを注意しておく．なお α_3 のより正確な値については 12.2 節で再び述べる．

参　考　文　献

1)　Kane, G.: 前出.

2)　Review of Particle Properties ; Phys. Rev. **D50** (1994). なお本書全体を通じて素粒子の数値はすべてこの文献に基づいている.

3)　文献 2), p.1417.

11　クォーク混合

11.1　カ　ビ　ボ　角

弱い相互作用の強さを与える結合定数について再び考えよう．レプトンの一つである μ^- は $\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ に従って崩壊する．そのファインマン図は図 11.1 である．遷移振幅はしたがって

$$A = \left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 (\bar{\nu}_\mu \gamma^\lambda P_{\mathrm{L}} \mu) \frac{1}{M_W{}^2 - q^2} (\bar{e} \gamma_\lambda P_{\mathrm{L}} \nu_e) \qquad (11.1)$$

である．ここで q は W の運動量を表す．いま，静止 μ の崩壊を考えているから $M_W{}^2 \gg q^2$ であり，プロパゲーターの分母に現れる q^2 を無視すると $P_{\mathrm{L}} = (1 - \gamma^5)/2$ を用いて

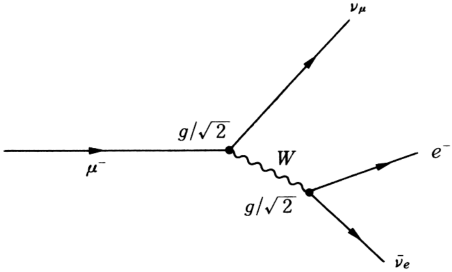


図 11.1　μ の崩壊

$$A=\frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda(1-\gamma^5)\mu][\bar{e}\gamma_\lambda(1-\gamma^5)\nu_e] \tag{11.2}$$

となる．ここで $G/\sqrt{2}$ は

$$\frac{G}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8M_W{}^2} \tag{11.3}$$

を表す．g を SU(2) の結合定数 g_2 に等しくとると G は低エネルギーにおける弱い相互作用を記述する四体フェルミ相互作用の強さ G_F に等しい（式(6.31)参照）が，ここではまだそう結論しないでおく．

一方，中性子の β 崩壊，$n\to p+e^-+\bar{\nu}_e$ はクォークで表して $d\to u+e^-+\bar{\nu}_e$ であるから，そのファインマン図は図 11.2 のようになる．図 11.1 と比べて上側のバーテックスにおける結合定数を $g'/\sqrt{2}$ としていることに注意．したがって遷移振幅は式（11.2）に対応して

$$A'=\frac{G'}{\sqrt{2}}[\bar{u}\gamma^\lambda(1-\gamma^5)d][\bar{e}\gamma_\lambda(1-\gamma^5)\nu_e] \tag{11.4}$$

となる．ここで $G'/\sqrt{2}$ は

$$\frac{G'}{\sqrt{2}}=\frac{gg'}{8M_W{}^2} \tag{11.5}$$

である．

式（11.2）および式（11.4）は弱い相互作用が（$V-A$）のカレント×カレントの形に書かれていることに注意しよう．すなわち

$$j^l_\mu=\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e+\bar{\mu}\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu+\cdots\cdots \tag{11.6}$$

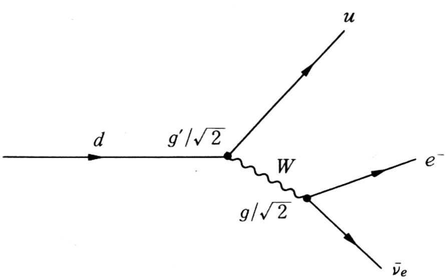


図 11.2　中性子の β 崩壊

$$j^q_\mu = \bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d + \cdots\cdots \tag{11.7}$$

と書くと式（11.2）は $A=(G/\sqrt{2})j^{l\mu}j^{l\dagger}_\mu$，式（11.4）は $A'=(G'/\sqrt{2})j^{q\mu}j^{l\dagger}_\mu$ に等しい．式（11.6），（11.7）において右辺の……は第 2，第 3 世代の寄与を意味する．

振幅が求められたから遷移確率，すなわち崩壊度が得られ，これを実験結果と比較することによって G および G' の値を決めることができる．結果は $G \neq G'$，すなわち $g \neq g'$ を示す．したがってこのままでは統一的な弱い相互作用の記述ができないことになる．新しいクォークを入れるたびに新しい結合定数を導入しなければならず，弱い相互作用が何種類もあることになってしまう．式（11.7）において第 2 世代以下を……で表したのはその意味であり，各世代ごとに結合定数を新たに導入しなければならない．何とかしてすべてのクォークおよびレプトンの荷電カレントに対して単一の相互作用の形，

$$A = \frac{G}{\sqrt{2}}J^\mu J_\mu{}^\dagger, \qquad J^\mu = \sum_f \bar{\psi}_{f_\mathrm{u}}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi_{f_\mathrm{d}} \tag{11.8}$$

に表せないか．ここで $f_\mathrm{u}, f_\mathrm{d}$ はそれぞれフェルミオンの 2 重項の上，下成分である．

K^+ は $(u\bar{s})$ の組合せからなるメソンであるが，その崩壊モードの一つに $K^+ \to \mu^+\nu_\mu$ がある．そのクォーク図を図 11.3 に示す．すなわち u クォークは世代を超えて s クォークと結合することもあることを示している．

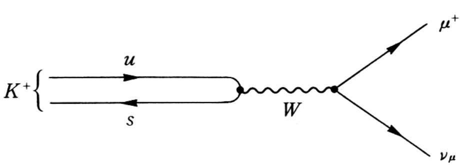


図 11.3　$K^+ \to \mu^+\nu_\mu$

以上の二つの例から次のような方法が考えられる．弱い相互作用において u クォークに結合するのは単独の d または s ではなく，その線形結合であるとする．

$$j_\mu^q = \bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)d' + \cdots\cdots \tag{11.9}$$

$$d' = d\cos\theta_C + s\sin\theta_C \tag{11.10}$$

したがって式 (11.5) において $g'=g\cos\theta_C$, $G'=G\cos\theta_C$ となって実験事実 $G\neq G'$ を説明することができる．μ の崩壊と中性子の β 崩壊の観測結果を比較して $\theta_C\sim 13°$ という数値が得られる．θ_C を**カビボ角**とよぶ．

式 (11.10) の d' に対してその直交状態

$$s' = -d\sin\theta_C + s\cos\theta_C \tag{11.11}$$

はどうなるか．これに結合する新しいクォークが存在するはずである．これを c クォークと名づける．c クォークが存在しなければならないことは次の例からわかる．K^0 と $\bar{K}^0$ の線形結合から $K^0{}_L$ を作る（くわしくは 11.3 節で述べる）と $K^0{}_L$ の崩壊モードのうち $\mu^+\mu^-$ への崩壊度は，他のモードへのそれに比べて極端に小さく，

$$\Gamma(K^0{}_L\to\mu^+\mu^-)/\Gamma(K^0{}_L\to \mathrm{all}) \sim 10^{-8} \tag{11.12}$$

である．図 11.4(a) に崩壊のクォーク図を示す．図 11.4(a) において，左側のクォーク結合は式 (11.10) より因子 $\sin\theta_C\cos\theta_C$ が掛るが，とてもこれで 10^{-4} のオーダーにはならない．しかし，c クォークが存在し，これが式 (11.11) のように d および s と結合するなら，図 11.4 (b) も存在する．その寄与は $-\cos\theta_C\sin\theta_C$ であり，ちょうど図11.4(a)からの寄与と打ち消し合って，式 (11.12) の実験結果を説明できる．このような方

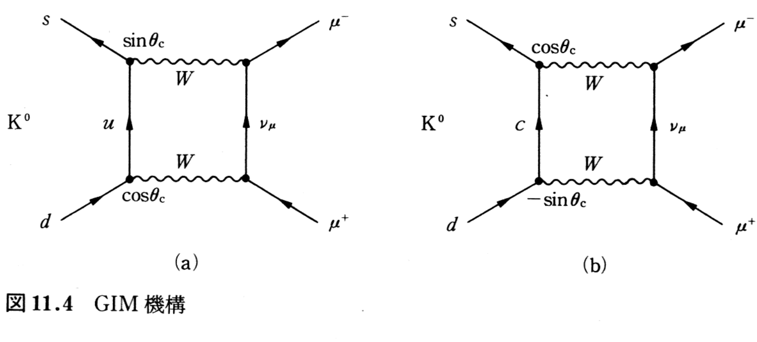


図 11.4　GIM 機構

法を **GIM** (Glashow-Illiopoulos-Maiani) **機構**とよぶ．図 11.4 において，Z^0 交換のグラフ（例えば図 6.2 (b) を見よ）と異なり，クォークのフレーバー変化を伴いながらも全体としては通常の W 交換のような電荷の移動がない過程であるから，これを **FCNC**（Flavor Changing Neutral Current）とよぶ．$K^0{}_L$ に限らず，一般に FCNC は禁止されるが，GIM 機構によってすべて説明できる．

c クォークはチャームそのものと考えることができる．これまで u, d, s, c と書いてきたクォークは，ハミルトニアンの固有状態，すなわち質量の固有状態であって，相互作用の固有状態はこれと異なり，式（11.10）および式（11.11）で与えられる．これを**クォーク混合**とよぶ．したがって弱い相互作用の SU(2) 2 重項は

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \quad \cdots\cdots \tag{11.13}$$

と表される．また，弱い相互作用を記述する荷電カレントは

$$J^\mu = \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\,d' + \bar{c}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\,s' + \cdots\cdots \tag{11.14}$$

と書ける．

ではレプトンの 2 重項はどうなるか．弱い相互作用によって電子 e と結合するニュートリノを電子ニュートリノ ν_e とよぶ．これが ν_e の定義である．ところが ν_e の質量はゼロであり，すなわちこれはそのまま質量の固有状態であるからレプトン混合は起こらない．もっともニュートリノに微小な質量を与えると話は変ってくるが，これについては 11.4 節で議論する．

レプトンに対して世代間の混合がないということは，各世代ごとに粒子数の保存が成り立つことを意味する．すなわち電子数 N_e を

$$N_e = \begin{cases} +1 & e^-, \nu_e \\ -1 & e^+, \bar{\nu}_e \\ 0 & \mu^-, \nu_\mu, \cdots\cdots \end{cases} \tag{11.15}$$

によって定義すると N_e は反応の前後で変化しない．N_μ, N_τ に

ついても同様である．例えば π の崩壊において $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ は可能であるが，$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_e$ 等は起こらない．このことはこれまでに挙げた種々の反応に対して断りなしに用いてきた．実験的な上限は $\Gamma(\mu^- \to e^-\gamma)/\Gamma(\mu^- \to e^-\nu_\mu\bar{\nu}_e) < 4.9\times 10^{-11}$ であり，N_l の保存則は非常によい精度で成り立っている．

ここまでくると式 (11.3) に現れた g は SU(2) の結合定数 g_2 に等しく，また G は四体フェルミ相互作用の強さ G_F に等しくとってよく，弱い相互作用はクォークとレプトンのすべてに対して統一的に式 (11.8) の形をとることがわかった．ただし，式 (11.8) において ψ_{fd} はクォークについては相互作用の固有状態をとる．

これによって式 (11.14) は質量の固有状態 u, d, s, c を用いて

$$J_\mu = (\bar{u}, \bar{c})\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)\,U\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{11.16}$$

と書くことができる．U は**混合行列**である．

カビボ角の応用例をもう一つ与えておこう．D^+ は $(c\bar{d})$ の組合せで作られるメソンであるが，その崩壊モードに対して

$$\Gamma(D^+ \to \bar{K}^0\pi^+) \gg \Gamma(D^+ \to K^+\pi^0) \tag{11.17}$$

が成り立つ．この不等式もカビボ角を用いて説明することができる．実際，これらの反応に対するクォーク図を書くと図 11.5

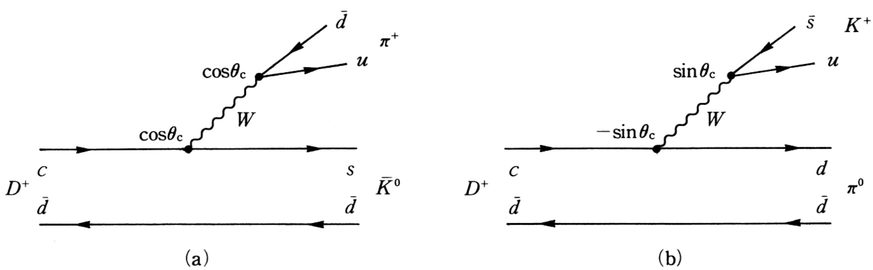


図 11.5　D^+ の崩壊

のようになる．したがって図 11.5 の反応 (b) と (a) の崩壊度の比は $\tan^4\theta_C \sim 3\times10^{-3}$ となり $D^+ \to K^+\pi^0$ は禁止される．

11.2 KM 行 列

前節の話はクォークの第 2 世代までである．第 3 世代まで含めるとどうなるか．式 (11.16) を 3 世代に拡張するとクォークの弱カレントは

$$J^\mu = (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t})\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)\,U\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{11.18}$$

となり，混合行列は 3 行 3 列となる．

ここで一般に世代数が n の場合の混合行列に現れる独立なパラメータの数を求めておく．$n\times n$ の複素ユニタリ行列は実数パラメータが $2n^2$ 個あるが，$U^\dagger U=1$ より n^2 個の制約条件がつき，さらにある一つのクォークに対する $(2n-1)$ 個のクォークの相対的な位相はクォークの波動関数に含めることができるからこれを引いて，$2n^2-n^2-(2n-1)=(n-1)^2$ が混合行列を決める独立な実パラメータの数となる．このうち独立な回転角の数は n 次元空間における回転面の数 ${}_nC_2=n(n-1)/2$ だけある．残りの $(n-1)^2-n(n-1)/2=(n-1)(n-2)/2$ は位相となる．すなわち一般に U を実行列とすることができない．まとめると

$$\begin{aligned} &\text{回転角の数：}\; n_\theta = \frac{1}{2}n(n-1) \\ &\text{位相の数：}\; n_\delta = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \end{aligned} \tag{11.19}$$

となる．特に $n=2$ のときは $n_\theta=1,\ n_\delta=0$ で回転角が一つだけ現れ，これがカビボ角になる．$n=3$ の場合は $n_\theta=3,\ n_\delta=1$ である．したがって 3 世代に対しては混合行列は回転角が三つと位相 δ が一つで四つのパラメータを用いて表される．

具体的に U の形を決める方法は唯一ではないが，2 世代の場合の式（11.6）の形を参照して次のように選ぶことができる．

$$U=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c_2&s_2\\0&-s_2&c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1&s_1&0\\-s_1&c_1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^{i\delta}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c_3&s_3\\0&-s_3&c_3\end{pmatrix} \tag{11.20}$$

ここで $c_i=\cos\theta_i$, $s_i=\sin\theta_i$ $(i=1,2,3)$ である．式（11.20）を計算すると次の **KM**（小林-益川）**行列**が得られる．

$$U=\begin{pmatrix}c_1&s_1c_3&s_1s_3\\-s_1c_2&c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta}&c_1c_2s_3+s_2c_3e^{i\delta}\\s_1s_2&-c_1s_2c_3-c_2s_3e^{i\delta}&-c_1s_2s_3+c_2c_3e^{i\delta}\end{pmatrix} \tag{11.21}$$

式（11.21）の U の行列成分は原理的には各クォークを含む崩壊過程または深非弾性ニュートリノ散乱の実験から求められるわけであるが，実際にはそう単純ではなく，現在のところ数%から数十%の誤差を含む．また，理論的に θ_i および δ の値を予言する確実なモデルもいまのところ存在しない．

なお，第 2 世代までに話を限れば，数値的には式（11.16）のカビボ角を用いても実質的に正しいことを注意しておく．

KM 行列の最大の特徴は位相 δ の存在である．$\delta\neq 0$ であれば $U^*\neq U$ となるが，この場合は次節に述べる CP の破れが現れる．したがってクォークが 3 世代あるということは弱い相互作用が本質的に CP の破れを含んでいることを示している．

11.3　*CP* の破れ

4.4.3 項においてニュートリノに対してパリティの保存則が破れることを見たが，一般に弱い相互作用において空間反転（これを P と書く）不変性は成り立たない．反応において粒子の代

りに反粒子を考えることを**荷電共役変換**（これを C と書く）とよぶが，弱い相互作用は C の下でも不変とはならない．その例を図 11.6 に示す．図において (a) は静止 π^+ の崩壊によって右向きに μ^+ が，左向きに ν_μ が飛び出している．矢印は運動方向，その下の 2 重矢印はスピンの向きを表す．これを鏡に映すと図の (b) になるが，これは ν_μ が右巻きとなってしまうから禁止される．すなわちこの反応は P の下で不変ではない．一方，(c) は (a) に対して C 変換を行ったものであるが，これも $\bar{\nu}_\mu$ が左巻きとなってしまい，禁止される．すなわち反応は C の下で不変ではない．ところが C と P を続けて行った CP 変換では図の (d) となり，これは右巻き $\bar{\nu}_\mu$ であるから許される．したがって一般に弱い相互作用は CP 不変であるといってよい．

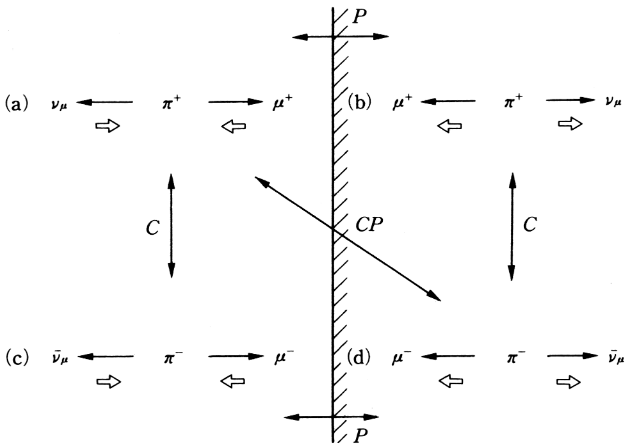


図 11.6 π の崩壊と C, P, および CP

ところがこれが正しくないのである．その例として K^0 の崩壊を見よう．$K^0(d\bar{s})$ と $\bar{K}^0(\bar{d}s)$ は強い相互作用によって作られる．K^0 と $\bar{K}^0$ のストレンジネス S はそれぞれ$+1$ と-1 であり，強い相互作用では S が保存されるのでその作られ方は一意的である（$p\bar{p} \to \Lambda^0 K^0$ は存在するが $p\bar{p} \to \Lambda^0 \bar{K}^0$ は起こらな

い）．しかし崩壊は弱い相互作用で起こるので S が保存されないため，K^0 も $\bar{K}^0$ もともに，例えば $\pi^+\pi^-$ に崩壊する．したがって崩壊については K^0 と $\bar{K}^0$ の線形結合が寄与する．これを K^0-$\bar{K}^0$ 混合とよぶ．K^0 と $\bar{K}^0$ の線形結合として次のものをとる．

$$\begin{aligned} |K_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \\ |K_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \end{aligned} \tag{11.22}$$

K^0 に CP 変換をほどこすと C で K^0 は $\bar{K}^0$ に変る．$K^0, \bar{K}^0$ はプシュードスカラーであるから P の下で符号を変えるが，K^0 と $\bar{K}^0$ の波動関数の位相を適当に選んで

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \tag{11.23}$$

と約束する．したがって式（11.22）の$|K_1\rangle$と $|K_2\rangle$ はそれぞれ $CP=+1$ と -1 の固有状態である．

$\pi^+\pi^-$ の 2 体系を考える．軌道角運動量ゼロの基底状態で $CP(\pi^+\pi^-)=+1$ である．π はボソンであるから粒子の入れ換えに対して対称で，$\pi^+\pi^- \underset{C}{\rightarrow} \pi^-\pi^+ \underset{P}{\rightarrow} \pi^+\pi^-$ だからである．フォトン γ に対しては $C(\gamma)=-1$ である．フォトンは電磁場の量子であり，電磁相互作用は粒子の電荷が逆になれば符号を変えるからこれは当然である．π^0 は 2γ に崩壊するから $C(\pi^0)=+1$ である．π^0 もプシュードスカラーであるから，結局 $\pi^+\pi^-\pi^0$ の三体系の基底状態に対しては $CP(\pi^+\pi^-\pi^0)=-1$ である．

K^0 と $\bar{K}^0$ の線形結合から作られる K_L と K_S を考える．これは実験的に K の崩壊で寿命の長いものと短いものがあるのでこうよぶ．それぞれの寿命は

$$\begin{aligned} \tau(K_L) &= (5.17\pm 0.04)\times 10^{-8}\,\text{sec} \\ \tau(K_S) &= (0.8926\pm 0.0012)\times 10^{-10}\,\text{sec} \end{aligned} \tag{11.24}$$

である．強い相互作用によって K^0 が作られたとしよう．K^0 は K_L と K_S の線形結合で書ける．このうち K_S は短い時間で

$\pi^+\pi^-$（または $\pi^0\pi^0$）に崩壊してしまい，残るのは K_L だけである．その後この K_L は $\pi^+\pi^-\pi^0$（または $\pi^0\pi^0\pi^0$，および $\pi l\nu$）に崩壊する．

したがってもし CP が保存するならば $K_S=K_1, K_L=K_2$ とおくことができる．実験結果はどうか．

$$
\begin{aligned}
|\eta_{+-}| &\equiv \left|\frac{A(K_L\to\pi^+\pi^-)}{A(K_S\to\pi^+\pi^-)}\right| = (2.269\pm0.023)\times10^{-3} \\
|\eta_{00}| &\equiv \left|\frac{A(K_L\to\pi^0\pi^0)}{F(K_S\to\pi^0\pi^0)}\right| = (2.259\pm0.023)\times10^{-3}
\end{aligned}
\tag{11.25}
$$

となり，$\eta\neq0$ であるから K^0 の崩壊において CP は破れている．CP の破れのパラメータを ε と書くと

$$
\begin{aligned}
|K_S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}(|K_1\rangle+\varepsilon|K_2\rangle) \\
|K_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}(|K_2\rangle+\varepsilon|K_1\rangle)
\end{aligned}
\tag{11.26}
$$

となる．ε は一般に複素数である．$\mathrm{Re}\,\varepsilon$ の値は 1.6×10^{-3} 程度となっている．

実際問題として CP の破れはむしろ歓迎すべきことである．初期宇宙の超高温度の世界ではフォトンがクォーク・反クォークの対生成を行い，これが再び対消滅をしてフォトンとなり，フォトンとクォーク・反クォークの間に熱平衡が保たれている．宇宙が膨張し，温度が低くなってゆくにしたがってこの物質と電磁波の熱平衡は破れ，電磁波は現在 3 K の宇宙背景放射として遍在し，一方，物質の方は重力によって局所化して銀河，星，星雲，惑星，人間となってゆく．ところがわれわれの住む宇宙は物質でできており，反物質はほとんどない．ということは初期宇宙のある時期に $\gamma\leftrightarrow q\bar{q}$ のバランスが崩れ，$N(q)\gg N(\bar{q})$ の相ができたことを意味する．これを CP の破れで説明するのである．

CP の破れは理論的にも実験的にも種々の問題を抱えている．K^0 についても完全に解けてはおらず，また K^0 以外に CP の破れは実験的に一つも見つかっていない．クォークの第 3 世

代までとると，10.3.3 項で述べた $B^0, \bar{B}^0$ がちょうどこの節での $K^0, \bar{K}^0$ に対応するから，B メソンの物理を調べることによって CP の破れに対する知識が得られ，かつ，KM 行列の位相パラメータ δ の値が決まってくると考えられるので，現在 B の実験のための加速器計画が日本も含めた世界中で進行中である．

なお，C，P のほかに時間反転不変性（これを T と書く）を含めると C，P，T のすべての変換を同時に行ったとき，物理法則は不変となるが，これを ***CPT* 定理**とよぶ．CPT 定理は相互作用が局所的（すなわち 1 点で起こる）ならば必ず成り立つ一般的なものであるから，CP が破れるということは同時に T も破れることを意味している．

強い相互作用は C，P，T のそれぞれの下で不変である．実際，これらの一つでも破れた例は見つかっていない．ところが困ったことに，強い相互作用を記述する QCD のラグランジアンは原理的に CP を破る項を含むことができるのである．QCD における CP の破れを表すパラメータを $\theta_{\rm QCD}$ で表すと，この $\theta_{\rm QCD}$ を何とか理論的にゼロとしたい．そのために新しく**アクシオン**とよばれる粒子を想定するとうまくゆくと考えられたが，現在のところアクシオンは見つかっておらず，強い相互作用における CP の問題はまだ未解決である．

11.4　ニュートリノ振動

これまではニュートリノの質量をゼロとしてきたが，実際に実験によるニュートリノの質量の上限は，現在それほど小さな値ではない．

$$m_{\nu_e} < 5.1\,\text{eV}, \qquad m_{\nu_\mu} < 0.27\,\text{MeV}, \qquad m_{\nu_\tau} < 31\,\text{MeV} \tag{11.27}$$

これをフォトンの質量の実験的な上限，$m_\gamma < 3\times10^{-27}$ eV と比べると，まだまだニュートリノの質量をゼロと確定するには至

っていないことがわかるであろう．

もしニュートリノに微小な質量を許すとすれば，どのように理論を修正しなければならないか．この場合，一般にニュートリノについても相互作用の固有状態とハミルトニアン，すなわち質量の固有状態が異なってくるから，レプトンについてもクォークのKM行列と同じ形の混合行列が現れ，例えば弱い相互作用によって作られた ν_e が自由粒子として空を飛んでいる間に ν_μ に変換される可能性が出てくる．これを**ニュートリノ振動**とよぶ．混合行列は一般に3行3列であるが，簡単のため，ここではカビボ角と同じように第2世代までの混合に話を限ってみよう．相互作用の固有状態 $|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle$ を質量の固有状態 $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$ によって表すと

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= |\nu_1\rangle\cos\theta + |\nu_2\rangle\sin\theta \\ |\nu_\mu\rangle &= -|\nu_1\rangle\sin\theta + |\nu_2\rangle\cos\theta \end{aligned} \tag{11.28}$$

となる．θ は混合角である．時刻ゼロに弱い相互作用によって作られた ν_e はその後の時刻 t には

$$|\nu_e(t)\rangle = \cos\theta\ e^{-iE_1t}|\nu_1\rangle + \sin\theta\ e^{-iE_2t}|\nu_2\rangle \tag{11.29}$$

となる．ただし ν_1, ν_2 の質量をそれぞれ m_1, m_2 として $E_i = \sqrt{p^2+m_i^2}\,(i=1,2)$ である．時刻 t に ν_e である確率は $P_{\nu_e\to\nu_e}(t) = |\langle\nu_e|\nu_e(t)\rangle|^2$ で与えられる．簡単な計算で

$$P_{\nu_e\to\nu_e}(t) = 1-2\sin^2\theta\cos^2\theta[1-\cos(E_1-E_2)t] \tag{11.30}$$

が得られる．

問題 式 (11.30) を示せ．

$m_i \ll p$ (運動量) として $|E_1-E_2| \fallingdotseq \Delta m^2/2p$, $\Delta m^2 = |m_1^2 - m_2^2|$ を用い，さらに振動長 L を

$$L \equiv \frac{2\pi}{|E_1-E_2|} = \frac{4\pi p}{\Delta m^2} = 2.5\left[\frac{p[\mathrm{MeV}/c]}{\Delta m^2[\mathrm{eV}]^2}\right][m] \tag{11.31}$$

によって定義すると

$$P_{\nu_e\to\nu_e}(t) = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right) \tag{11.32}$$

となる．したがって ν_e の生成点から距離 x 離れた点で ν_e の観測を行うと，$x\sim nL$ ではフラックスが極端に小さくなり，ニュートリノ振動を確かめることができる．

以上は真空中でのニュートリノの伝播であるが，物質中では少し修正が必要となる．ν_e は物質中の電子と荷電カレント（W 交換）および中性カレント（Z 交換）を通じて相互作用をする．一方 ν_μ は電子と中性カレントによる相互作用しかもたない(図 11.7)．したがってこの差が混合行列 U に付け加わり，U_{ee} には物質中の電子密度に比例する項が現れる．逆に，物質中のニュートリノ振動を調べると電子の密度分布の情報が得られることになる．

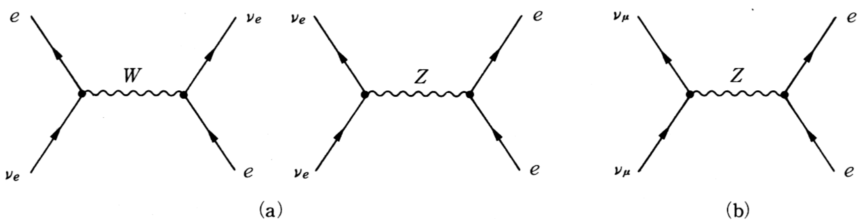


図 11.7　物質中の電子とニュートリノの相互作用．(a) $\nu_e e$，(b) $\nu_\mu e$．

ニュートリノ振動は単にニュートリノの質量を調べるというアカデミックな興味だけでなく，現実の問題に応用される．太陽の中心部では原子核反応によって電子ニュートリノが生成され，これが太陽表面に運ばれ，空間を伝播して地球に到達する．太陽内部における熱核反応によってどのくらい電子ニュートリノが生成されるかは**標準太陽モデル**（Standard Solar Model, SSM と略す）によって計算されている．これを地上における電子ニュートリノのフラックスの観測値と比較すると[1]，

$$\text{Flux}(\text{観測値})/\text{Flux}(\text{SSM}) = 0.46\pm0.05\pm0.06 \tag{11.33}$$

である．誤差はそれぞれ系統誤差と統計誤差を表している．し

たがって標準太陽モデルを修正するか，あるいは素粒子論を修正するかのいずれかが必要となる．素粒子の方でいえば最も単純にはニュートリノ振動を考慮すればよい．ただし，上にも述べたように，物質中のニュートリノ振動は真空中と異なるので，一つには太陽中心から表面までの輸送の問題と，地球内部におけるニュートリノの輸送がからんでくる．実際，ニュートリノ以外の宇宙線のバックグラウンドを消去するために，実験は地下深くで行われたり，地球の裏側からやってくるニュートリノを観測したりする．この場合，地球内部での物質密度の分布に対するくわしい知識が必要となる．

太陽以外でも，例えば超新星爆発の際に多量のニュートリノの放出が起こるが，これを検出することによってニュートリノの情報が得られる．実際1987年に大マゼラン雲の中で起こった超新星爆発の際に放出されたニュートリノを日本およびアメリカで検出している．このような**ニュートリノ天文学**は21世紀へ向けての新しい学問分野として期待されている．

参考文献

1) Hirata, K. S. *et al*.: Phys. Rev. Letters **65**, 1297 (1990).

12 まとめと展望

12.1 標準モデルの問題点

$SU(3)_c \times SU(2) \times U(1)_Y$ によって記述されるクォークとレプトンの標準モデルには自由パラメータが多く存在する．まずこれら三つの群に対応するゲージ場と物質場の結合定数である g_1, g_2, g_3 がある．自発的対称性の破れを記述し，ゲージ場に質量をもたせるためのヒッグス場が必要となるが，その質量 m_H と真空期待値 v_H がある．クォークの質量は自由パラメータとして残り，これが六つある．KM 行列には混合角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ と位相の δ が含まれる．さらにレプトンの質量（ニュートリノの質量はゼロとおいて）が三つ．最後に 11.3 節の終りに述べた強い相互作用での CP の破れを表す θ_{QCD} があり，標準モデルのパラメータの数は全部で 19 ある．

自由パラメータの数が 19 もあるようでは，とても最終的な理論といえないことは明らかであろう．ゼロとまでいわずとも，せめて一つのパラメータで理論が作られるならば，素粒子論のめざしていた究極の 1 元論である．そのための努力と成果が現在どの程度まで進んでいるのかをこの章で議論してゆく．

12.2 大統一理論

すぐ思いつく方法は，対称性を広げることである．ちょうど低エネルギーにおける弱い相互作用と電磁相互作用が・高エネルギーではワインバーグ-サラム・モデルによって弱・電磁相互作用に統一されたように，さらにエネルギーを上げると大きな対称性が表れ，これによって強い相互作用，電磁相互作用，および弱い相互作用の三つが一つの単一な相互作用で記述される可能性がある．これを**大統一理論**（Graud Unified Theory，略して **GUT**）とよぶ．

実際，低エネルギーでは式 (10.25) で表されるように三つの結合定数の値は大きく異なるが，$U(1)_Y$ はアーベリアンであるから高エネルギーになるほどその結合定数は式（8.90）のように大きくなり，一方 SU(2) と $SU(3)_C$ は非アーベリアンであるからその結合定数は式（9.35）のように小さくなる．したがって十分大きなエネルギーではこれら三つの結合定数の値が等しくなることが考えられる．そのエネルギーは $\sqrt{s} \sim 10^{16}$ GeV という大きな値となる．これは未来も含めて地上の加速器では到底達し得ない値である．したがって宇宙のきわめて初期の超高温の世界でのみ到達可能なエネルギーであり，GUT の直接検証は難しい．

難しいが不可能ではない．なぜなら，GUT 理論から導かれる低エネルギー現象があるからである．その一つに陽子崩壊がある．

GUT ではクォークとレプトンを同じ基盤に立って論じるから，これらは一つの多重項にまとめられる．するとクォークとレプトンをつなぐ行列要素が現れ，クォーク $\leftrightarrow$ レプトンの遷移が可能となる．したがって陽子はもはや安定とはいえず，レプトンに崩壊する可能性が生じる．陽子崩壊の検出は GUT の検証となる．

GUT は SU(3), SU(2), U(1) を含まねばならないから，最も簡単な GUT のゲージ対称性は SU(5) である．数年前までの素粒子論の教科書にはこの SU(5) のくわしい説明が書かれていたが，本書では述べない．なぜなら，SU(5) の予言する陽子崩壊 $p \to \pi^0 e^+$ の寿命が観測と合わず，GUT としての SU(5) はすでに否定されているからである．実際 LEP の実験グループは e^+e^- 衝突で多数の Z^0 を作り，その崩壊を調べた[1)]．その結果 $Z^0 \to q\bar{q}$ と $Z^0 \to q\bar{q}g$ の崩壊度の比較から $\alpha_3(m_Z) = 0.126 \pm 0.005$ が得られた．また，$Z^0 \to \tau^+\tau^-$ の崩壊から $\alpha_3(m_\tau) = 0.367 \pm 0.007$ を得る．この二つの値から $\sqrt{s} = 10^{16}$ GeV まで $\alpha_3(s)$ の値を外挿すると $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の値が 1 点に収束せず，SU(5) は正しくないことがわかる．

GUT としては SU(5) よりさらに大きな対称性，例えば 10 次元回転群 O(10) をとらねばならない．しかしこの場合は O(10) に限らず，対称性の破れに対してユニークなものが理論的に決まらず，今度は予言能力がなくなってくる．GUT はいまのところ未解決のままである．

12.3 他 の モ デ ル

12.3.1 超対称モデル

これまで本書では，対称性として内部対称性のみをくわしく論じてきた．実際には実空間における対称性も存在するから，これを内部対称性と統一できないかと考えるのは自然の筋道であろう．例えばスピンとアイソスピンを同じ基盤に立って論じるのである．ところが，それはだめであるという **No Go 定理**が成り立つ．実空間での時空の対称性であるポアンカレ群（ローレンツ変換と時空の平行移動の両方を合せたもの）はコンパクトではないが，このようなコンパクトでない群と，内部対称性を一つにまとめた有限次元のユニタリ表現は存在しない．

しかし No Go 定理には抜け道がある．例えば回転角 θ のよ

うな群のパラメータをc数とすればたしかに定理が成り立つが，q数とすれば話が別になる．例えば群のパラメータ θ_i のある組合せに対して反交換関係 $\{\theta_i, \theta_j\}=\delta_{ij}$ を課す．粒子の言葉に直すと，これはボソンとフェルミオンを同じ対称性の中に含めてしまうことに対応する．これを**超対称**とよぶ．スピン 1/2 のクォークにはそれに対応する超対称パートナーであるスピン・ゼロのスクォークを考え，クォークとスクォークを同時に含む超対称場をとってその変換を見るのである．

特に重力を量子化したスピン2のグラビトンを考えると，その超対称パートナーであるスピン 3/2 のグラビティーノを導入し，グラビトンとグラビティーノによる重力の量子論を作ると，ある程度までは（ループの数を制限したとき）有限な重力場の量子論を作ることができる．これを**超重力**とよぶ．

超重力に限らず，超対称の問題点は，これまでに一つの超対称パートナーも見つかっていないということである．現時点では超対称は，この意味で単なる統一理論への一つの可能性でしかない．ただし，理論的には通常の SU(5) と異なり超対称 SU(5) は三つの結合定数が $\sqrt{s}\sim10^{16}$ GeV 付近で1点に収束するから GUT の最有力候補ではある．

12.3.2 超弦モデル

クォークやレプトンは何種類もあるから，これらを統一的に扱うにはこれらの下部構造を考えればよい．すなわちクォークやレプトンを点粒子と見なさず，構造を与え，その構成粒子を考える．分子→原子→原子核→核子→クォークという連鎖の次の段階である．この“基本粒子”はいろいろな呼び名でよばれ，統一的な名前はまだない（サブクォーク，プレクォーク，プレオン，Tofu-Vofu，……等）．これらのモデルはいずれも代数的レベル（足算と引算）ではうまくゆくこともあるのだが，そのダイナミクスになんらかの仮定をおくとすぐに破綻をきたしてしまい，確定的なモデルはまだない．

素粒子を点と見なさず構造をもたせるモデルは，昔から種々提唱されてきたが，そのうち最もうまくゆきそうなものとして弦モデルがある．素粒子を伸び縮みするゴムひものように考え，このゴムひもが時空をはいてゆくときの世界面の発展が素粒子相互作用であるとする．一般に素粒子反応は式（8.55）で導入したマンデルスタム変数 s と t の入れ換えに対する**双対(dual) 対称性**がある．すなわち 2 体散乱において s チャネルの共鳴からの寄与の総和は結果として t チャネルにおける粒子交換からの寄与の総和に等しい．これを図 12.1(a) に示す．一方，粒子をひも（string，弦）と見なし，ひもの時空における発展を見るとこの双対対称はゴムひもを伸び縮みさせることによって単純に示すことができる（図 12.1(b)）．

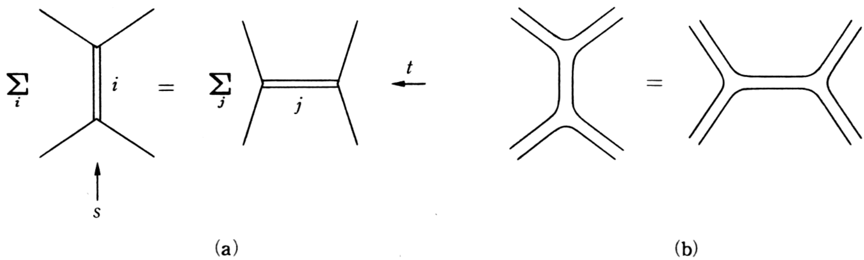


図 12.1 双対対称と弦モデル

超対称を考慮し，かつ素粒子の内部自由度と時空対称を入れた，重力も含む“最終的な”素粒子の弦モデルを**超弦モデル**とよぶ．超弦モデルは大ぶろしきの割には現象論的な予言能力はゼロに等しく，“理論家の理論家による理論家のための”超弦理論としてのみ生き延びているようである．

12.3.3 格子ゲージ理論

素粒子論に対する取り組み方のもう一つの方法として時空の離散化がある．場の量子論における発散の困難は，時空の 1 点における相互作用に一つの原因がある．したがって連続な多様体

としての時空をやめ，ある基本的な長さ a を考えて，a より小さな時空を最初から考えない方法である．すなわち時空を格子状に分け，各格子点に例えばクォークを置き，格子と格子を結ぶ線分上にゲージ場を与える．あとは物性論におけるイジング・モデルのように各格子点上の自由度を考慮して数値計算を行う．実際にはスーパーコンピュータを用いてこのモデルによる種々の量を計算する．ある程度の成果は得られているが，これがはたしてダイナミクスの解明に寄与することになるのか疑問である．

12.4　展　　望

本書は20世紀の末に出版される．まだ数年残ってはいるがここで21世紀への展望を行っておくことは無意味ではあるまい．大げさにいえば20世紀の素粒子論の進歩と限界を見つめ，21世紀への遺産とする．ほとんどが負債であるが，学問の進歩にとって負債もまた立派な遺産の一つである．

最初は小さな問題から始めよう．

(1)　トップの発見

これについては何度も述べた．トップが見つかればゲージ理論が正しい道筋に沿って進んでいることが確かめられる．

(2)　ヒッグス粒子の発見

これはゲージ理論にとって必須のものである．ただしヒッグスが素粒子ではなく，ダイナミカルにほかから導き出せる可能性は残っている．いずれにしても単なる現象論的パラメータでなく，実際に観測されたヒッグス粒子を用いて，具体的にヒッグス機構が働くことを確かめる必要がある．

(3)　KM行列の行列要素の確定

特に CP の破れに関連して，混合角だけでなく，位相 δ の値がほしい．これは B^0 の物理である程度見通しがつくかもしれない．理論的には混合角の値を決める信頼できる理論の確立も必

要である.

(4) 強い相互作用における CP の破れ

$\theta_{\mathrm{QCD}}=0$ となる理論をアクシオン以外の方法で作ることができるか.

(5) ニュートリノの質量

ニュートリノ実験は現在進行中のものや計画中のものが多数あり，ある程度の成果は近い将来得られるであろう．これはまた宇宙論，特に暗黒物質の候補としても重要である.

(6) 陽子崩壊

SU(5)に限らず，大統一理論が正しければ陽子は必ず崩壊する．1例でもよいからその候補を見つけることが実験の目標となる．逆にその崩壊モードから GUT のモデルが具体的となる.

(7) 重力波の検出

重力波はすでに連星パルサーの電波観測によってその存在が確認されているが，地上でのその直接検証は，重力場の量子化への一つのステップとして必要である．現在世界でいくつかの実験が計画されている.

以上の七つは数年以内にでも，肯定的か否定的かは別として何らかの結論が得られるであろう．次にもう少し大きな問題を取り上げる.

(a) クォーク閉じ込め

低エネルギーにおける QCD は摂動論が成り立たないため，具体的に計算することができない．つまりクォーク閉じ込めの問題は，われわれが摂動論以外に計算方法を知らないことに原因がある. 21 世紀の科学は非摂動論の取扱いをどうするかということが大きなテーマとなるであろう．上に述べた格子ゲージ理論も非摂動論であり，クォーク閉じ込めに対するある程度の見通しが得られているが，コンピュータで計算したらなぜか知らないがクォーク閉じ込めがいえた，などといって満足するわけ

にはいかない．

(b)　重力の量子化

重力場の量子化において重力定数が次元をもつためにくりこみができない．これが一番の問題ではあるが，それと並んで重力のような非線形問題に対してどのように取り組んだらよいのかという問題が残る．われわれは線形方程式に対する解法しかもち合せていない．非線形な対象に対する解として重力とは別にソリトン解があるが，重力の場合はおそらくソリトン的な手法ではうまくゆかないと思われる．大域的トポロジーと局所的非線形性は別の話だからである．

(c)　クォーク・レプトンの下部構造

超弦モデルとは別に，ある程度ダイナミクスを含んだサブクォーク・モデルによって素粒子の1元モデル（一気に1元までゆかなくともよいが）をめざす．ここでダイナミクスとは，例えば素粒子の質量を理論的に導き出せるようなものでなければならない．クォーク閉じ込めの理論からハドロンの質量が出せるであろう．それとまったく同じ意味でクォークとレプトンの質量が出せると思われる．ヒッグス機構があるではないかというのは単なる問題のすり換えでしかない，一つのクォークまたはレプトンを考えるごとに一つのヒッグスを導入するのでは，何もいったことにならない．かつてディラックは，微細構造定数 α の値が 1/137 であることを理論的に導き出せるものでなければ最終的な素粒子論ではないと主張したが，それにならって，電子の質量を理論的に導き出せる理論でなければ最終的な素粒子論ではない，といってよい．

(d)　新しい素粒子現象

以上の（a)～(c）は時期尚早な話なのかもしれない．GUT は 10^2 GeV から 10^{16} GeV までの 14 けたにわたって何も新しいことは起こらないことを仮定している．これを砂漠（desert）とよぶが，これが正しいという保障はない．すなわちもうほんの1けたか2けた加速器のエネルギーを上げるだけで，どんどん

新しい素粒子現象が見つかる可能性もある．その場合は虚心に新しい現象を忠実にたどり，現在の素粒子論に対する反省材料を豊富に手に入れることができる．

本書の最初に述べたように，素粒子論は本質的に未完成な学問である．それでも一歩一歩，究極の理論をめざして進んで行く，この努力の過程に人間の知への挑戦の喜びがある．

参 考 文 献

1) 森　俊則：日本物理学会誌 50 巻 6 号，p.441 (1995).

参考文献——さらに勉強したい人のために——

本書は素粒子物理学の入門書であり，したがって全体の見通しをよくすることに重点を置いた．本来はもっと数学的に厳密に議論すべき点も多くある．また，ぜひ取り入れなければならない話題（例えばアノマリー，強い CP 問題等）も省略したものが多い．それゆえ，本書でまず現代素粒子論の雰囲気をつかむことができたならば，以下に紹介するより高度な教科書によってさらに深く勉強されることを希望する．

まず古典的名著としては

(1) N.N.Bogoliubov and D.V.Shirkov:
Introduction to the Theory of Quantized Fields (John Wiley & Sons, 1979).

(2) J. D. Bjorken and S. D. Drell:
Relativistic Quantum Mechanics (MacGraw-Hill, 1964).
Relativistic Quantum Fields (MacGraw-Hill, 1965).

が挙げられる．(1) の方がより数学的に厳密で，特に作用積分と変分に関しては，一般相対論の教科書は別として他の追随を許さない．それに対して (2) はずっと読みやすい．ディラック方程式の解，および量子電気力学の計算について，本書はほとんどこの教科書に沿って記述してある．したがってこの部分については本書は「読者とともに Bjorken-Drell を読む」形にな

っている．

残念ながら上の二つの教科書は現代素粒子論の主流であるゲージ理論については出版年が古いため，ほとんどまったく触れていない．ゲージ理論と，その量子化にとって必要な径路積分の方法も含んだ新しい教科書で読みやすいものとして

(3) T. P. Cheng and L. F. Li :
Gauge Theory of Elementary Particle Physics (Oxford, 1984).

(4) L. H. Ryder :
Quantum Field Theory (Cambridge, 1985).

がある．

本書では超対称，超重力，超弦モデルについて触れることができなかったが，これらについては例えば

(5) M. Kaku :
Quantum Field Theory (Oxford, 1993).

を参照されたい．

最も新しい教科書として

(6) S. Weinberg :
The Quantum Theory of Fields, vol. 1 Foundations (Cambridge, 1995).

がある（vol. 2 は 1996 年出版予定）．本格的に素粒子論を究めようという読者にはこの 2 巻（1200 ページ）を全力で読破することをお勧めする．費した労力に十分報われる学問の至福が得られるであろう．

索　　引

さ　行

た　行

な 行

は 行

ま　行

や　行

著者の紹介

牧　二郎（まき　じろう）

1952年東京文理科大学物理学科（旧制）卒業．名古屋大学理学部助手，助教授を経て，1966年より京都大学基礎物理学研究所教授．1992年より近畿大学理工学部教授．この間，上記研究所長，日本学術会議会員（第13期）等を歴任．京都大学名誉教授，理学博士．専攻は素粒子論，量子力学基礎論．

林　浩一（はやし　こういち）

1964年東京大学理学部物理学科卒業．1969年同大学大学院理学系研究科博士課程修了．京都大学基礎物理学研究所アトム型研究員，東京大学宇宙線研究所流動研究員，近畿大学理工学部講師，助教授を経て，1985年より同大学同学部教授．理学博士．専攻は素粒子論．

パリティ物理学コース　素粒子物理

平成7年12月25日　発　行

著作者　牧　二郎
　　　　林　浩一

発行者　鈴木信夫
　　　　出版事業部　深山恒雄

発行所　丸善株式会社　東京・日本橋

出版事業部　〒113　東京都文京区本郷二丁目38番3号
編集部　電話(03)5684-5081／FAX(03)5684-2458
営業部　電話(03)5684-5571／FAX(03)5684-2456
郵便振替口座　00170-5-5

組版印刷・株式会社　精興社／製本・富士製本株式会社

ISBN 4-621-04119-3 C 3342　　Printed in Japan